3e année FISA

# Mise à niveau Signal

# Transformée de Fourier – Analyse fréquentielle des signaux apériodiques

**Alexandre Boyer**

alexandre.boyer@insa-toulouse.fr

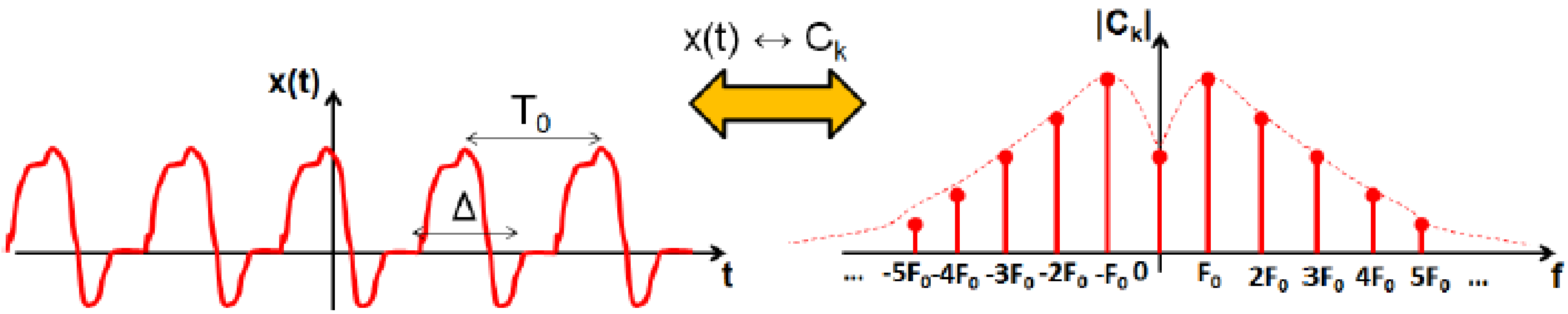
https://moodle.insa-toulouse.fr → I2MAEL11 - Conception et Circuits et Traitement du Signal

# Série de Fourier → transformée de Fourier



## Généralisation

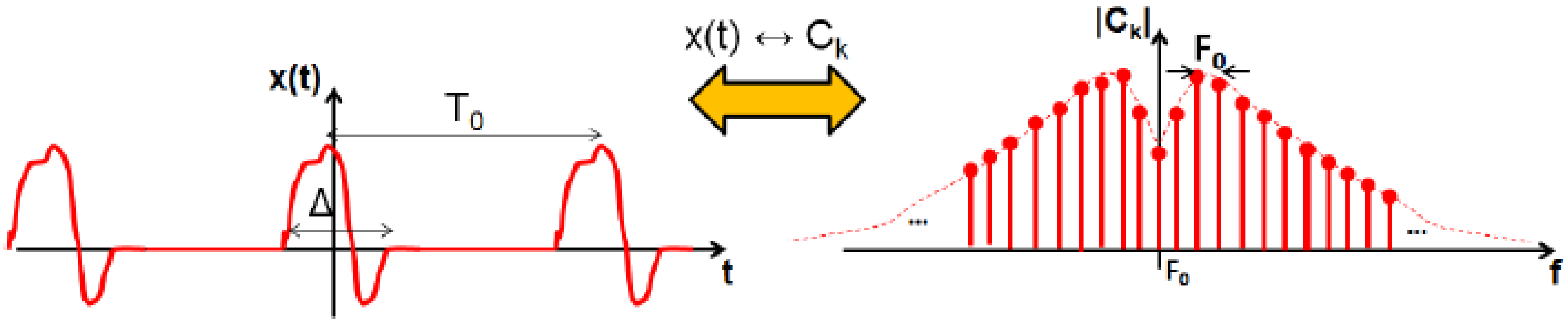
- Le développement en série de Fourier est limité aux signaux périodiques.
- Extension possible aux **signaux apériodiques à support temporel borné** via la transformée de Fourier.
- Illustration : soit un signal x(t) périodique




**Que devient le spectre si T0 tend vers l'infini sans que Δ ne change ?**

## Généralisation

- Le signal x(t) tend vers un signal apériodique à support temporel non borné.
- L'écart entre chaque raie du spectre tend vers 0 → le spectre devient **continu**. Il est défini à toutes les fréquences f dans R.




- **<u>Problèmes liés au calcul du développement en série de Fourier</u>**

  1. la représentation du spectre en somme discrète de composants harmoniques n'est plus adaptée !
  2. L'introduction du terme $1/T_0$ annule l'ensemble des coefficients de Fourier.

# Série de Fourier → transformée de Fourier



## Générralisation

1. Quand $T_0$ tend vers l'infini, la somme se transforme en intégrale.
2. On modifie l'expression de l'équation de la transformation, en la **multipliant par $T_0$**.

➢ Extraction de l'expression de la transformée de Fourier :

$f_0 = df$ tel que $\lim_{T_0 \to +\infty} df = 0$ et $k x df = f$

$$\lim_{T_0 \to +\infty} T_0 C_k = T_0 \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = X(f)$$

$$\lim_{T_0 \to +\infty} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k T_0 f_0 e^{j2\pi k f_0 t} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi k f_0 t} df$$

# Transformée de Fourier



## Définition

- Transformée de Fourier directe (du domaine temporel vers le domaine fréquentiel (fréquences réelles)

$$X(f) = \mathscr{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \qquad \text{ou} \qquad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

À valeurs complexes

À valeurs réelles (voire complexes)

- Transformée de Fourier inverse (du domaine fréquentiel vers le domaine temporel

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi f t} df \qquad \text{ou} \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{+j\omega t} df$$

- **Transformation bijective et unique !**

# Lien entre les différentes transformées



## Lien avec la transformée de Laplace

- La transformée de Fourier est identique à la transformée de Laplace bilatérale en posant p = jω. Idem pour leurs transformées inverses.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \qquad X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot exp(-pt)\mathrm{d}t \ , \quad p = \sigma + j\omega$$

- La transformée de Laplace est une généralisation de la transformée de Fourier pour tous les signaux, via l'utilisation d'une fréquence complexe.
- Les propriétés des séries, transformées de Fourier et de Laplace sont exactement les mêmes !

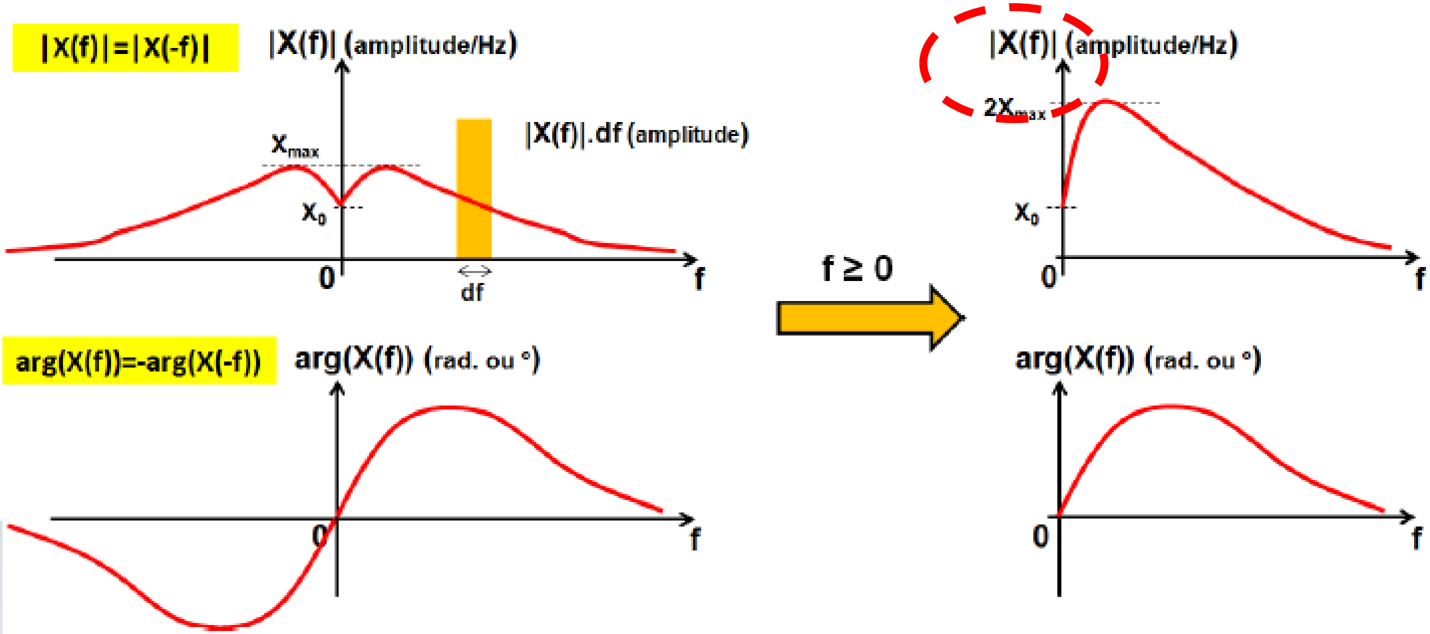
## Cas d'un spectre continu

- Spectre de raies → spectre continu, sur f $\in [-\infty; +\infty]$
- Représentation du module (spectre à proprement parlé) et de la phase pour toutes les fréquences de R.
- Propriétés de symétries par rapport à f = 0 → représentation du spectre pour f $\geq$ 0.

$$|X(f)| = |X(-f)| \quad Arg(X(f)) = -Arg(X(-f))$$

$$X(f) = X(-f)^* \Rightarrow Re(X(f)) = Re(X(-f)) \;\; et \;\; Im(X(f)) = -Im(X(-f))$$

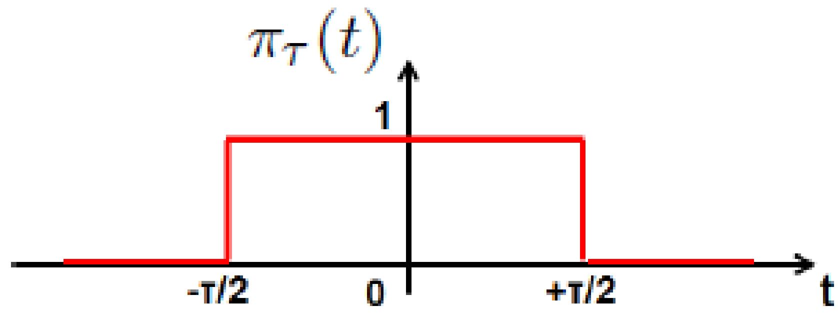
- **Unité du spectre : densité d'amplitude**



# Exemples de calcul

## Fonction porte

- Largeur $\tau$ centrée sur 0
- Calcul de la transformée de Fourier

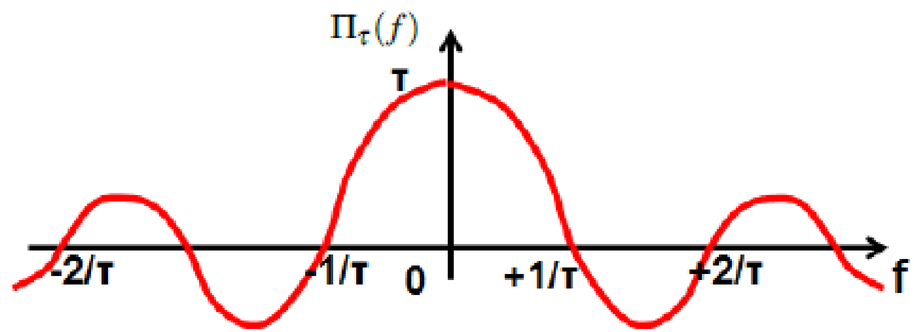



$$\Pi_\tau(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_\tau(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} 1 e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{-j2\pi f} [e^{-j2\pi f t}]_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}}$$

$$\Pi_\tau(f) = \frac{1}{-j2\pi f} (e^{+j2\pi f \frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}}) = \frac{sin(\pi f \tau)}{\pi f}$$

$$\Pi_\tau(f) = \tau \frac{sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} = \tau sinc(\pi f \tau)$$

Fonction sinus cardinal




- **Dualité :** Signal à support temporel fini → Spectre à support infini

# Exemples de calcul

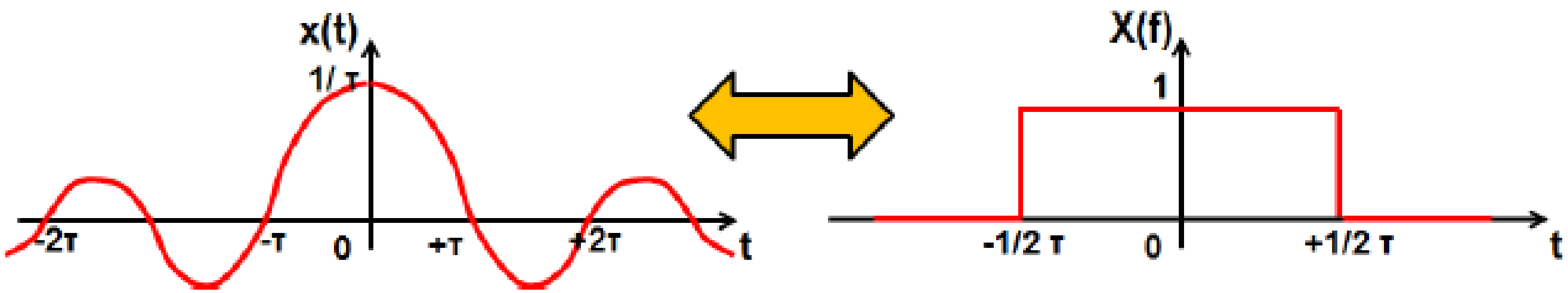


## Fonction sinus cardinal

- La transformée de Fourier d'une fonction sinus cardinal est une fonction porte.
- Démonstration par la transformée de Fourier inverse :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{\frac{1}{\tau}}(f) e^{+j2\pi f t} df = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} e^{+j2\pi f t} df$$

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi t\tau}\left[e^{+j2\pi f t}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{\pi t\tau}\frac{e^{j\pi\frac{t}{\tau}} - e^{-j\pi\frac{t}{\tau}}}{2j} = \frac{sin(\pi\frac{t}{\tau})}{\pi t\tau} = \frac{1}{\tau}sinc(\pi\frac{t}{\tau})$$



# Exemples de calcul

## Impulsion de Dirac

- Transformée de Fourier : $$\mathscr{F}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f0} = 1$$
- Spectre avec densité d'amplitude uniforme en fonction de la fréquence → **Bruit blanc**
- **Dualité :** Signal à support temporel fini → Spectre à support infini

- Transformée de Fourier inverse : $$\mathscr{F}(\delta(f - f_0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0) e^{+j2\pi ft} df = e^{+j2\pi f_0 t}$$
- Fonction temporelle complexe (spectre non symétrique), sauf si $f_0 = 0$.
- **Dualité :** Spectre support temporel fini → signal à support temporel infini

# Exemples de calcul



## Fonctions cosinus et sinus

- Le calcul de leur transformée de Fourier n'est pas trivial.

$$\mathscr{F}[cos(\omega_0 t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathscr{F}[cos(\omega_0 t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j(\omega_0 - \omega)t} + e^{-j(\omega_0 + \omega)t}}{2} dt$$

**Somme de deux intégrales ne convergeant pas !**

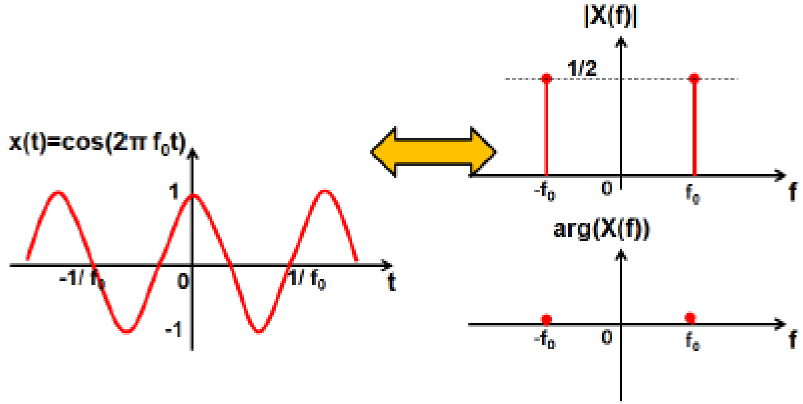
# Exemples de calcul

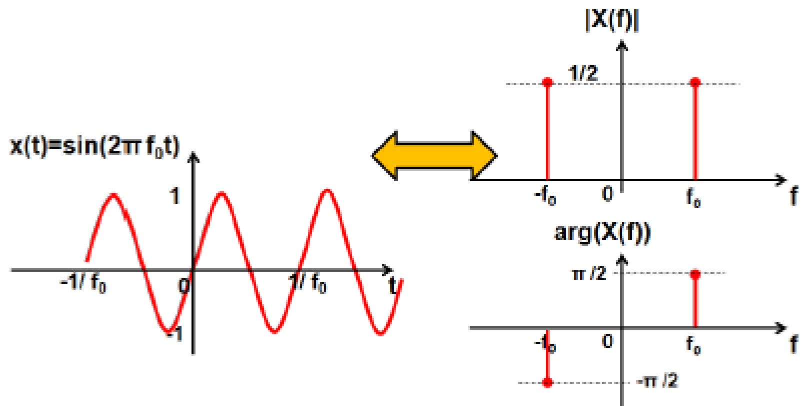
## Fonctions cosinus et sinus

➢ Réutilisation de la transformée de Fourier inverse d'une impulsion de Dirac :

$$\mathscr{F}[cos(2\pi f_0 t)] = \mathscr{F}[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}] = \frac{1}{2}\mathscr{F}[e^{j2\pi f_0 t}] + \frac{1}{2}\mathscr{F}[e^{-j2\pi f_0 t}] = \frac{\delta(f - f_0)}{2} + \frac{\delta(f + f_0)}{2}$$

$$\mathscr{F}[sin(2\pi f_0 t)] = \mathscr{F}[\frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}] = \frac{1}{2j}\mathscr{F}[e^{j2\pi f_0 t}] - \frac{1}{2j}\mathscr{F}[e^{-j2\pi f_0 t}] = \frac{\delta(f - f_0)}{2j} - \frac{\delta(f + f_0)}{2j}$$



# Propriétés



## Propriétés de la transformée de Fourier

- Les mêmes que les séries de Fourier et la transformée de Laplace

TABLE 6.1 – Tableau récapitulatif des propriétés de la transformée de Fourier

| | |
|---|---|
| Linéarité | $ax(t)+by(t) \Leftrightarrow aX(f)+bY(f)$ |
| Théorème du retard | $x(t-t_0) \Leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0}$ |
| Théorème du changement d'échelle $y(t)=x(at)$ | $Y(f)=\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{f}{\lvert a\rvert})$ |
| Dérivée temporelle | $y(t)=\frac{d^kx(t)}{dt^k} \Leftrightarrow Y(f)=(j2\pi f)^kX(f)$ |
| Dérivée fréquentielle | $Y(f)=\frac{d^kX(f)}{df^k} \Leftrightarrow y(t)=(-j2\pi t)^kx(t)$ |
| Intégration temporelle | $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau \Leftrightarrow Y(f)=\frac{1}{2}X(0)\delta(f)+\frac{X(f)}{j2\pi f}$ |
| Produit de convolution dans le domaine temporel | $y(t)=x_1*x_2(t) \Leftrightarrow Y(f)=X_1(f)\cdot X_2(f)$ |
| Dualité | si $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ alors $X(t) \Leftrightarrow x(-f)$ |
| Produit de convolution dans le domaine fréquentiel | $y(t)=x_1\cdot x_2(t) \Leftrightarrow Y(f)=X_1*X_2(f)$ |

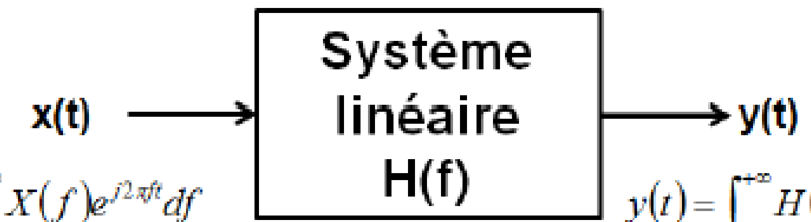
# Réponse d'un système LTI



## Réponse à un signal apériodique

- Le calcul de la réponse peut se faire dans le domaine fréquentiel, via l'utilisation de la transformée de Fourier et la connaissance de la fonction de transfert (domaine fréquentiel).

$$y(t) = \mathscr{F}^{-1}[Y(f)] = \mathscr{F}^{-1}[H(f)X(f)]$$




$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) X(f) e^{j2\pi ft} df$$

- Exemple : Déterminez l'expression du spectre (module/phase) de la réponse d'un filtre passe-bas d'ordre 1 (fréquence de coupure $f_c$) à un signal porte (durée $\tau$). On prendra $f_c = \tau$.

# Réponse d'un système LTI



## Réponse à un signal apériodique

$$X(f) = \tau.\sin c(\pi\tau f)$$

$$H(f) = \frac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_C}}$$

x

$$Y(f) = \frac{\tau.\sin c(\pi\tau f)}{1 + j\dfrac{f}{f_C}}$$

<u>Module :</u> $$\left|Y(f)\right| = \frac{\tau f_C.\sin c(\pi\tau f)}{\sqrt{f^2 + f_C^2}}$$

<u>Argument :</u> $$Arg\left(Y(f)\right) = -Arc\tan\left(\frac{f}{f_C}\right)$$

## Equivalence produit de convolution - multiplication

- Equivalence produit de convolution et multiplication dans les domaines temporels et fréquentiels

$$x * y(t) \Longleftrightarrow X(f)\cdot Y(f) \qquad x\cdot y(t) \Longleftrightarrow X * Y(f)$$

- Exemple : calculez la transformée de Fourier M(f) de m(t) : $m(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,.\,\pi_{T0}(t)$

$$p(t) = \cos(2\pi f_0 t) \Rightarrow P(f) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

$$s(t) = \pi_{T0}(t) \Rightarrow S(f) = T_0 sinc(\pi f T_0)$$

$$M(f) = P * S(f) = \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2} * T_0 sinc(\pi f T_0)$$

$$M(f) = \frac{T_0}{2} sinc(\pi(f - f_0)T_0) + \frac{T_0}{2} sinc(\pi(f + f_0)T_0)$$

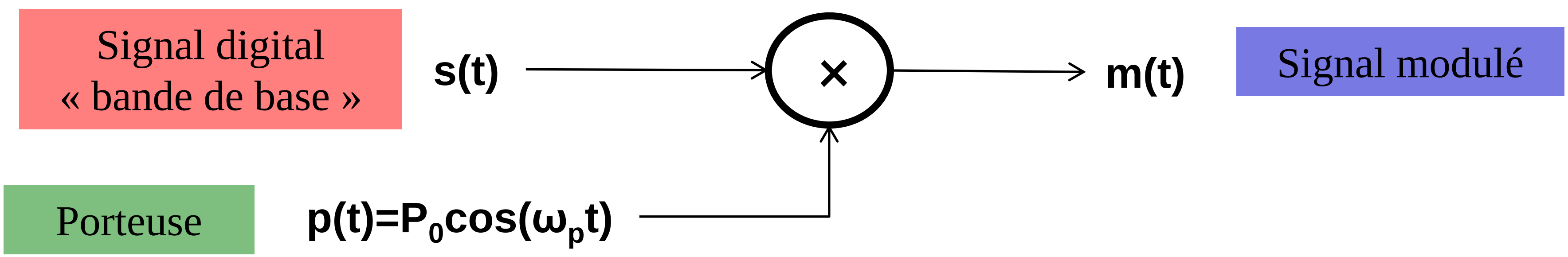
$$M(f) = \frac{1}{2} S(f - f_0) + \frac{1}{2} S(f + f_0)$$

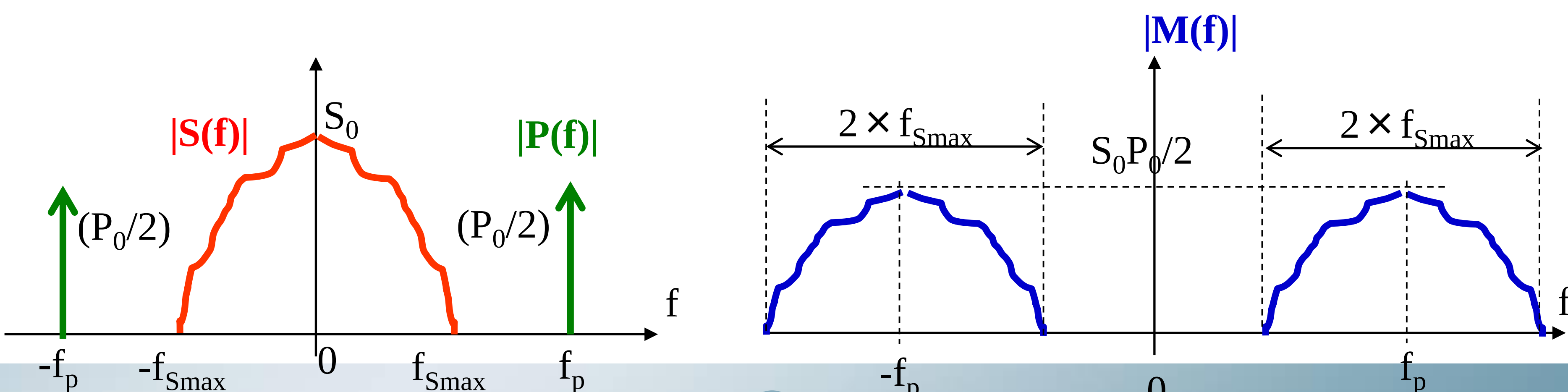
# Propriétés du produit de convolution

## Application : transposition de fréquence

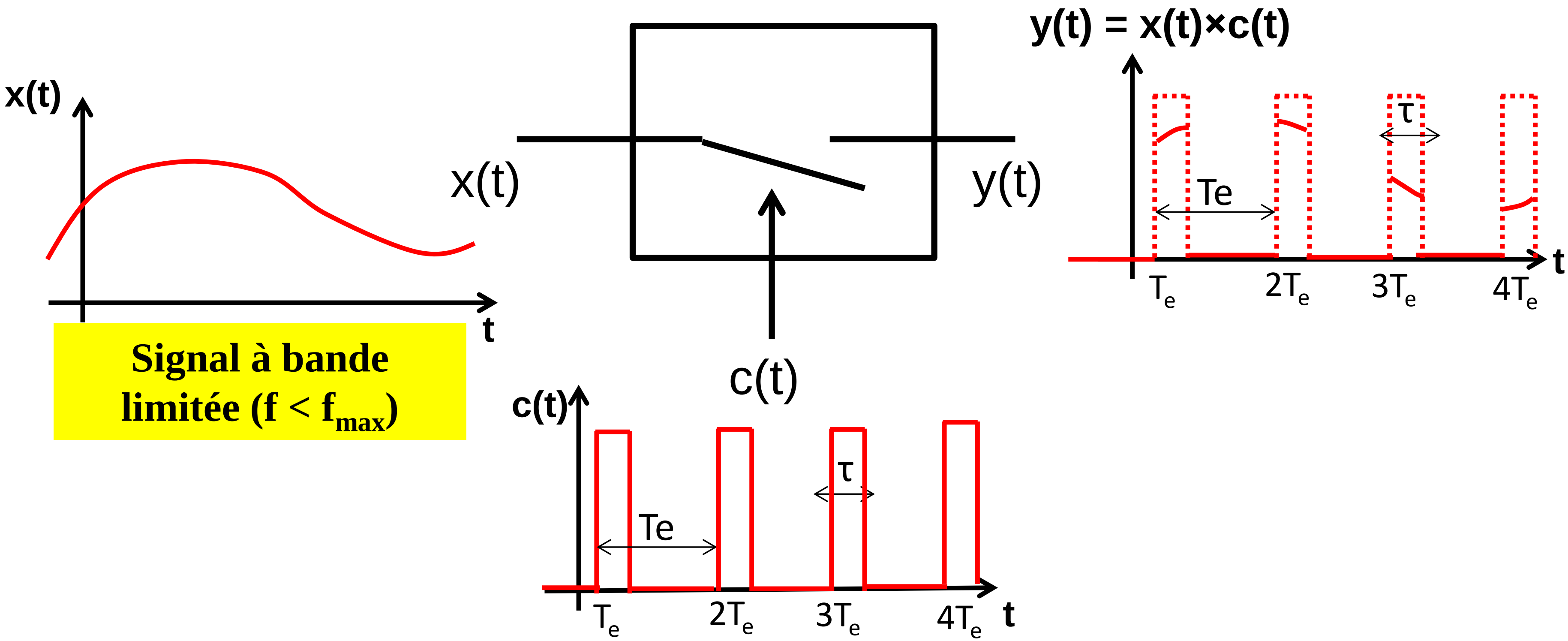
- Les signaux de radiocommunication sont rarement transmis sur leur bande de fréquence originale (bande de base), mais sont **transposées** autour d'une fréquence centrale dite porteuse (modulation)

- Exemple :

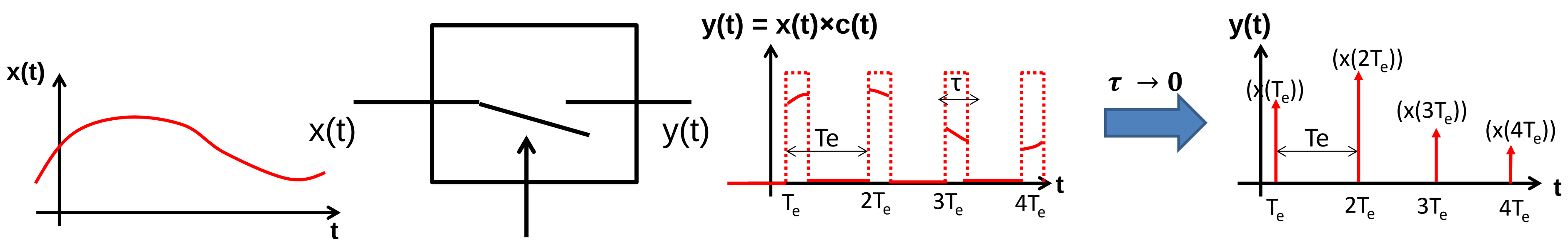


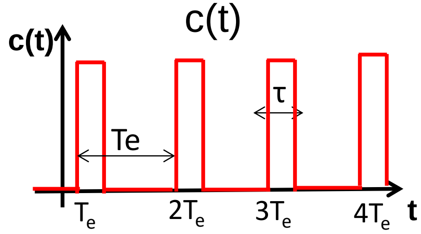
## Modélisation du processus d'échantillonnage



## Modélisation du processus d'échantillonnage




**Signal à bande limitée (f < $f_{max}$)**




Commande de l'échantillonneur modélisée par un peigne de Dirac : $pgn(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$

$$x(kT_e) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-kT_e)dt = \lim_{\tau \to 0} \tau x(t)\delta(t-kT_e)$$

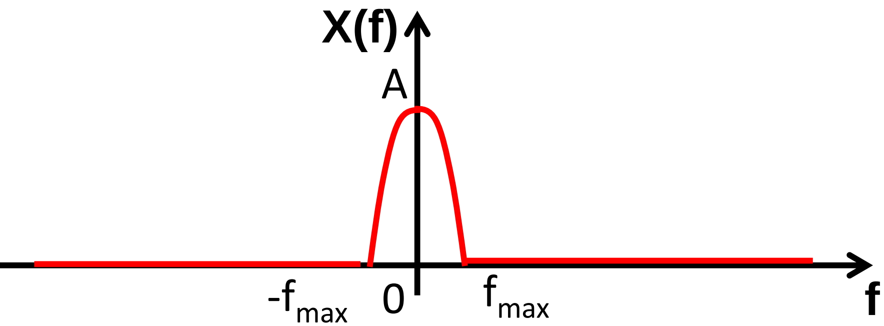
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} pgn(t)x(t)dt = \lim_{\tau \to 0} \tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t-kT_e)$$

# Echantillonnage – Théorème de Shannon

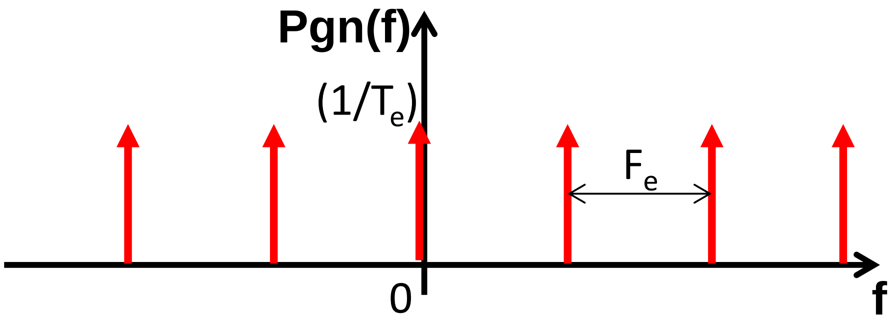


## Impact de l'échantillonnage sur le spectre

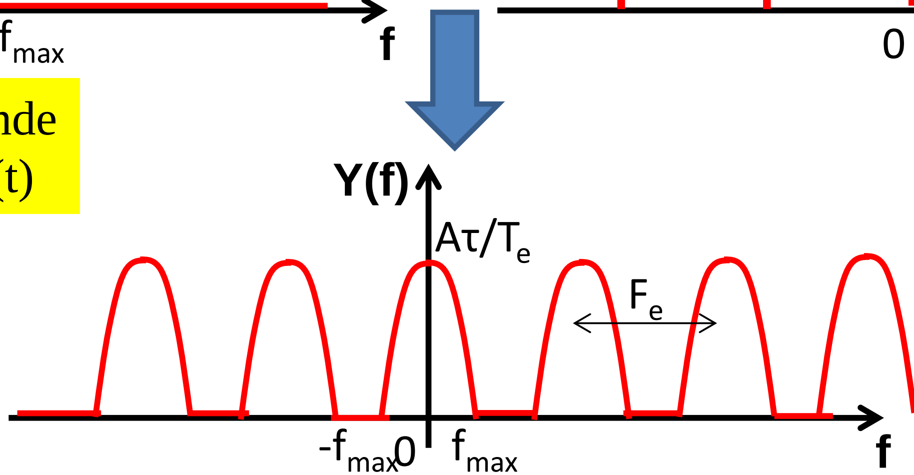
$$Y(f) = TF[\tau.x(t).pgn(t)] = \tau X(f) * Pgn(f) = \frac{\tau}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - \frac{k}{T_e})$$




*




Spectre de bande de base de x(t)



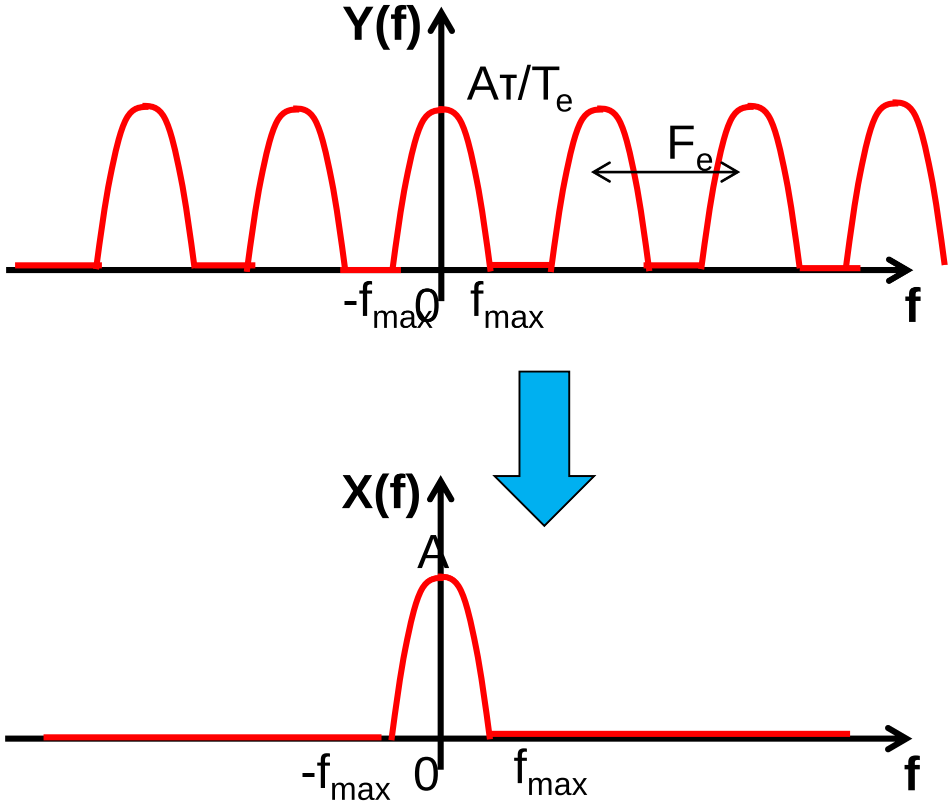

Multiple répétitions du spectre de bande de base, répétée tous les k.Fe.

# Echantillonnage – Théorème de Shannon



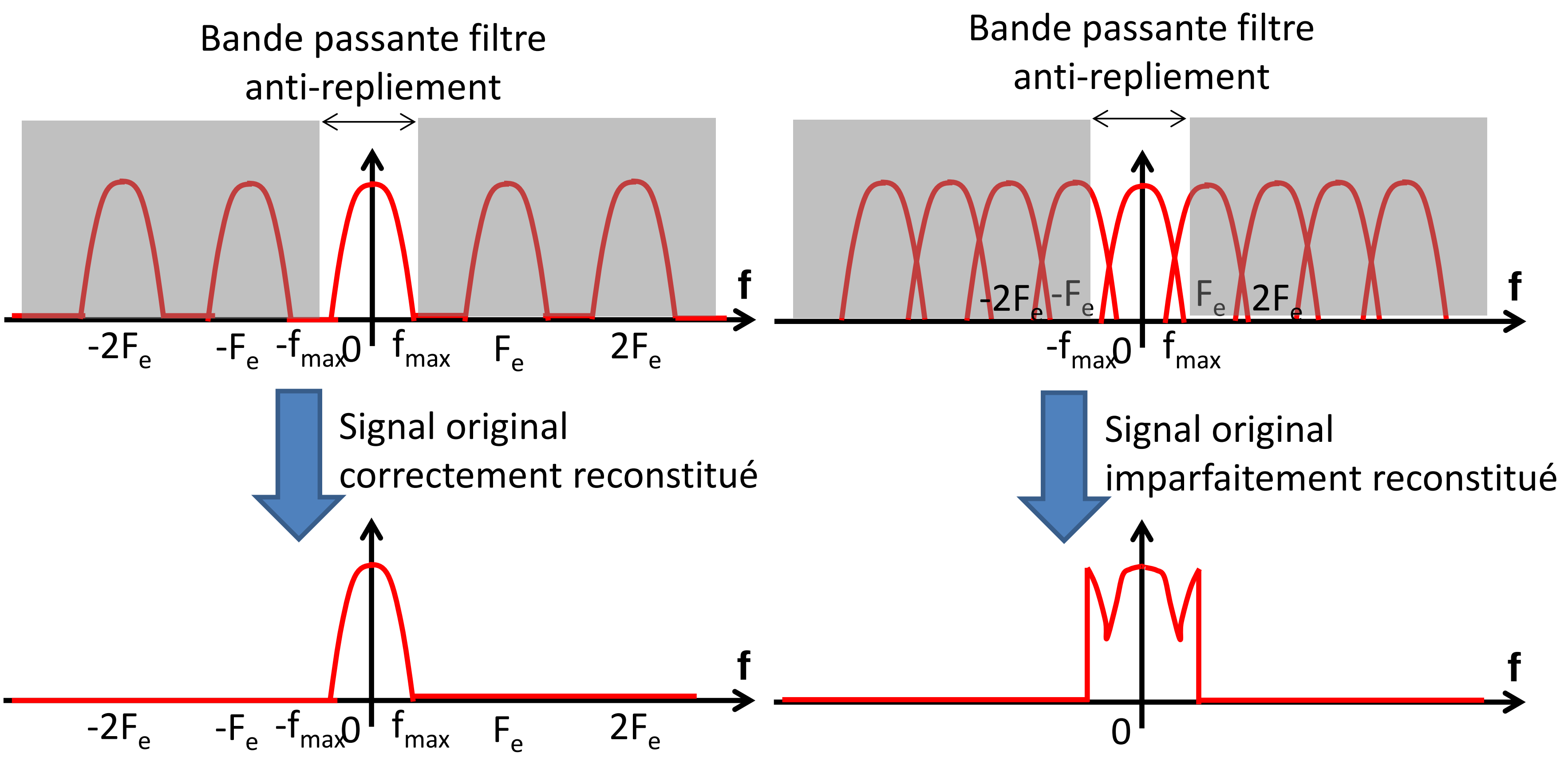
## Théorème de Shannon-Nyquist

Peut-on reconstituer le signal orignal à partir du signal échantillonné ? Quelles sont les conditions ?



## Théorème de Shannon-Nyquist

**Reconstitution par filtrage passe-bas seulement si :** $F_e \geq 2 \times f_{max}$




**(a) : $F_e > 2 \times f_{max}$** **(b) : $F_e < 2 \times f_{max}$**