3e année FISA

Mise à niveau Signal

Série de Fourier – Analyse fréquentielle des signaux périodiques

Alexandre Boyer

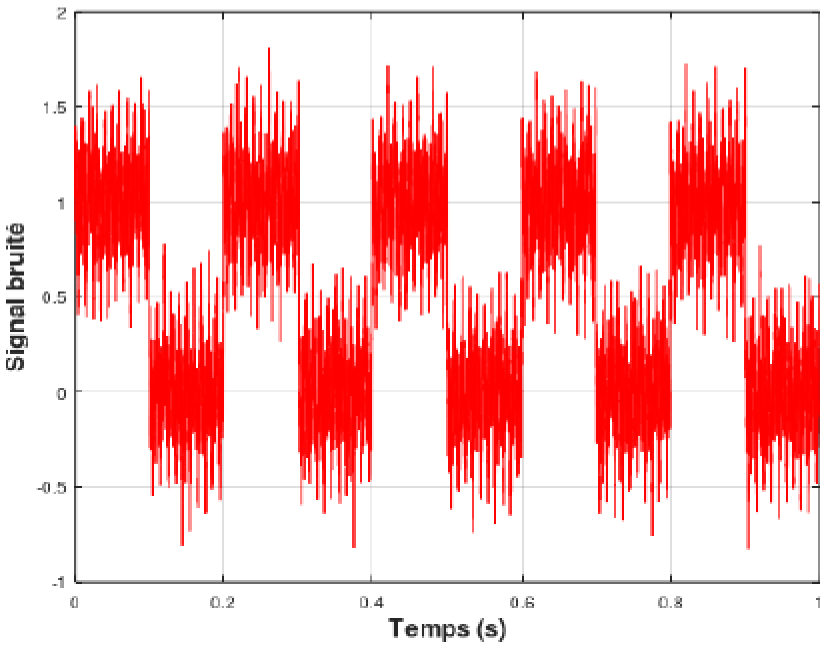
alexandre.boyer@insa-toulouse.fr

https://moodle.insa-toulouse.fr → I2MAEL11 - Conception et Circuits et Traitement du Signal (clé : **signal21**)

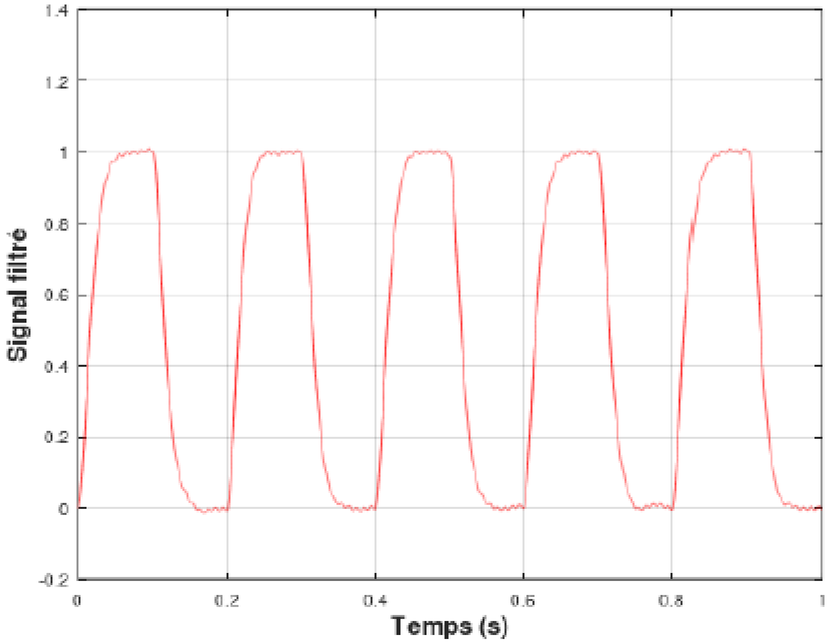
Pourquoi l'analyse fréquentielle ?

Exemple

➢ Filtrage du bruit affectant un signal digital (fréquence signal = 5 Hz, bruit > 100 Hz)



Filtrage



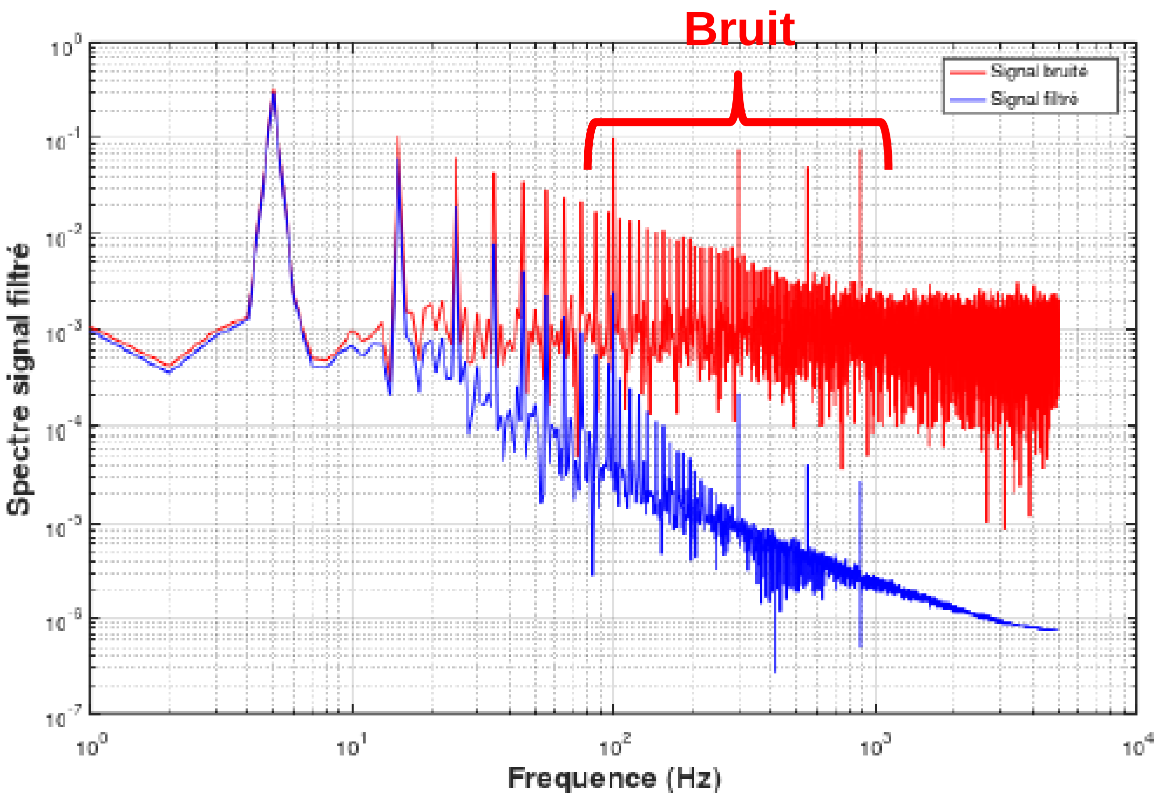
Comment fixer les caractéristiques du filtre (fréquence de coupure, ordre, …) ?

Besoin de déterminer le contenu fréquentiel du signal à filtrer

Pourquoi l'analyse fréquentielle ?

Exemple

➢ Contenu fréquentiel des signaux non filtrés et filtrés



➢ L'outil mathématique utilisé pour déterminer le contenu fréquentiel de ces signaux est la transformée de Fourier.

Les différents types

➢ Selon la nature du signal, différents types de transformées de Fourier peuvent être définis :

- ✓ Signaux continus périodiques → décomposition en série de Fourier

Cette partie

- ✓ Signaux continus apériodiques → transformée de Fourier (des signaux à temps continu)

Prochaine partie

- ✓ Signaux à temps discrets → transformée de Fourier à temps discrets

Semestre 6 (cours Signaux et Filtrage Numérique)

Fonctions périodiques

Définition

- Une fonction périodique f(t), de période T_0, se répète toutes les T_0 secondes (période fondamentale) :

$$f(t) = f(t + kT_0)\ ,\ \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

- L'inverse de la période fondamentale F_0 est la fréquence fondamentale : $F_0 = \dfrac{1}{T_0}$

- La connaissance de la forme du signal sur l'intervalle [0 ; T_0] (ou des variantes comme [-T_0/2 ; +T_0/2] est suffisante pour connaitre entièrement le signal.

- Cas des fonctions trigonométriques : fonctions périodiques avec une propriété intéressante :

$$\int_{T_0} \cos(k.2\pi F_0 t)dt = \int_{T_0} \sin(k.2\pi F_0 t)dt = 0 \quad \forall k \in Z^*$$

Développement d'une fonction périodique en série

Principe

- Toute fonction périodique x(t), de période fondamentale T_0, peut être exprimée sous la forme d'une série de fonctions $\Phi_k(t)$:

$$x(t) = C_0\Phi_0(t) + C_1\Phi_1(t) + C_2\Phi_2(t) + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k\Phi_k(t)$$

- À condition que :
  - Les fonctions $\Phi_k(t)$ sont périodiques
  - Les fonctions $\Phi_k(t)$ forment une base de fonctions orthogonales

Développement d'une fonction périodique en série

Principe

- L'orthogonalité de deux fonctions est liée au résultat de leur produit scalaire :

$$\int_T \Phi_m(t)\Phi_n(t)dt \Rightarrow \text{Cas de fonctions à valeurs réelles}$$

$$\int_T \Phi_m(t)\Phi_n^*(t)dt \Rightarrow \text{Cas de fonctions à valeurs complexes}$$

- La base de fonctions Φ_k est une base orthogonale si :

$$\int_T \Phi_m(t)\Phi_n(t)dt = \begin{cases} K & si\ m = n \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Intérêt de cette propriété ?

$$\int_T x(t)\Phi_k(t)dt = C_0\int_T \Phi_0(t)\Phi_k(t)dt + C_1\int_T \Phi_1(t)\Phi_k(t)dt + \ldots + C_k\int_T \Phi_k(t)\Phi_k(t)dt + \ldots = 0 + 0 + \ldots + C_k K + 0\ldots$$

$$\int_T x(t)\Phi_k(t)dt = C_k K \Rightarrow C_k = \frac{1}{K}\int_T x(t)\Phi_k(t)dt$$

Développement d'une fonction périodique en série

Cas des fonctions trigonométriques ?

- Cas particulier de la famille exponentielle complexe où σ = 0 :

$$f(t) = Ae^{\sigma t}e^{j\omega t} \Rightarrow f(t) = A\cos(\omega t) + jA\sin(\omega t)$$

- Soit la famille de fonctions : $\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \; et \; k \in Z$

Constitue t-elle une base de fonctions orthogonales ?

On pose : $\Phi_m(t) = e^{jm\omega_0 t}$

$$m \neq n : \int_0^{T_0} \Phi_m(t)\Phi_n^*(t)dt = \int_0^{T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t}dt = \frac{1}{j(m-n)\omega_0}\left[e^{j(m-n)\omega_0 t}\right]_0^{T_0} = 0$$

$$m = n : \int_0^{T_0} \Phi_m(t)\Phi_n^*(t)dt = \int_0^{T_0} e^{j(m-m)\omega_0 t}dt = \int_0^{T_0} 1dt = T_0$$

Développement d'une fonction périodique en série

Cas des fonctions trigonométriques ?

- Cas particulier de la famille exponentielle complexe où σ = 0 :

$$f(t) = Ae^{\sigma t} e^{j\omega t} \quad \Rightarrow \quad f(t) = A\cos(\omega t) + jA\sin(\omega t)$$

- Soit la famille de fonctions : $\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} \; et \; k \in Z$

Constitue t-elle une base de fonctions orthogonales ?

$$\begin{cases} \int_0^{T_0} \Phi_n(t)\Phi_n^*(t)dt = T_0 \\ \int_0^{T_0} \Phi_m(t)\Phi_n^*(t)dt = 0 \, , \, m \neq n \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Oui ! donc on peut décomposer toute fonction périodique comme série de fonctions trigonométriques complexes

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

Avec

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \, , \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Valeurs complexes

Cas des fonctions trigonométriques ?

- Décomposition alternative :

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(A_k^{'}-jB_k^{'})e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t)=(A_0^{'}-jB_0^{'})+\sum_{k=-\infty}^{-1}(A_k^{'}-jB_k^{'})e^{jk\omega_0 t}+\sum_{k=1}^{+\infty}(A_k^{'}-jB_k^{'})e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t)=A_0^{'}+\sum_{k=1}^{+\infty}(A_k^{'}-jB_k^{'})e^{jk\omega_0 t}+\sum_{k=1}^{+\infty}(A_k^{'}-jB_k^{'})e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t)=A_0^{'}+2\sum_{k=1}^{+\infty}A_k^{'}cos(k\omega_0 t)+2\sum_{k=1}^{+\infty}B_k^{'}sin(k\omega_0 t)$$

$$x(t)=A_0+\sum_{k=1}^{+\infty}A_k cos(k\omega_0 t)+\sum_{k=1}^{+\infty}B_k sin(k\omega_0 t)$$

Développement d'une fonction périodique en série

Cas des fonctions trigonométriques ?

- Décomposition alternative :
  - Les fonctions de base sont : $\Phi_k^{(1)}(t) = \cos(k\omega_0 t)$ et $\Phi_k^{(2)}(t) = \sin(k\omega_0 t)$
  - On peut vérifier que la base est orthogonale
  - Les coefficients associés se calculent :

$$A_0 = A_0' = C_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt$$

$$A_k = 2A_k' = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)cos(k\omega_0 t)dt = 2Re[C_k]\ ,\quad k \in \mathbb{N}^+$$

$$B_k = 2B_k' = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)sin(k\omega_0 t)dt = -2Im[C_k]\ ,\quad k \in \mathbb{N}^+$$

Calcul des coefficients d'une série de Fourier

Forme trigonométrique

- Décomposition en fonctions cosinus et sinus

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k sin(k\omega_0 t)\ ,\quad k \in \mathbb{N}^+$$

$$A_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt$$

Valeur moyenne du signal x(t) (composante continue)

$$A_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)cos(k\omega_0 t)dt\ ,\quad k \in \mathbb{N}^+$$

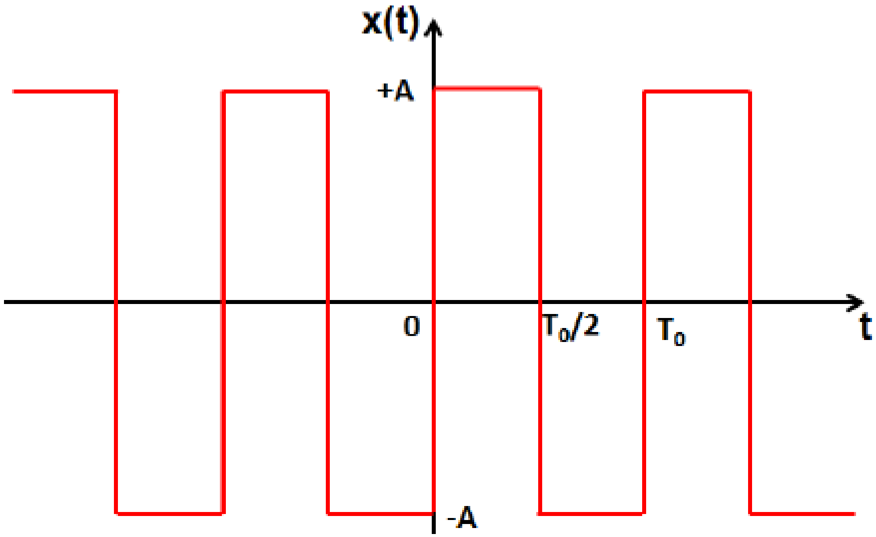
$$B_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)sin(k\omega_0 t)dt\ ,\quad k \in \mathbb{N}^+$$

Amplitudes des harmoniques de rang k

Calcul des coefficients d'une série de Fourier

Forme trigonométrique - exemple

- Décomposition en série de Fourier d'un signal carré :



$$x(t) = \begin{cases} +A & si\ t \in [0; \frac{T_0}{2}] \\ -A & si\ t \in [\frac{T_0}{2}; T_0] \end{cases}$$

Valeur moyenne nulle → $A_0 = 0$

Vérification : $A_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} Adt - \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} Adt = 0$

Calcul des coefficients d'une série de Fourier

Forme trigonométrique - exemple

- Coefficients A_k, k > 0 :

$$A_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt = \frac{2A}{T_0}\int_0^{T_0/2}\cos(k\omega_0 t)dt - \frac{2A}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}\cos(k\omega_0 t)\,dt$$

$$A_k = \frac{2A}{k\omega_0 T_0}[\sin(k\omega_0 t)]_0^{T_0/2} - \frac{2A}{k\omega_0 T_0}[\sin(k\omega_0 t)]_{T_0/2}^{T_0}$$

$$A_k = \frac{A}{k\pi}(\sin(k\pi) - \sin(0)) - \frac{A}{k\pi}(\sin(2k\pi) - \sin(k\pi)) = 0$$

- Coefficients B_k, k > 0 :

$$B_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\sin(k\omega_0 t)dt = \frac{2A}{T_0}\int_0^{T_0/2}\sin(k\omega_0 t)dt - \frac{2A}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}\sin(k\omega_0 t)\,dt$$

$$B_k = \frac{2A}{k\omega_0 T_0}[-cos(k\omega_0 t)]_0^{T_0/2} - \frac{2A}{k\omega_0 T_0}[-\cos(k\omega_0 t)]_{T_0/2}^{T_0}$$

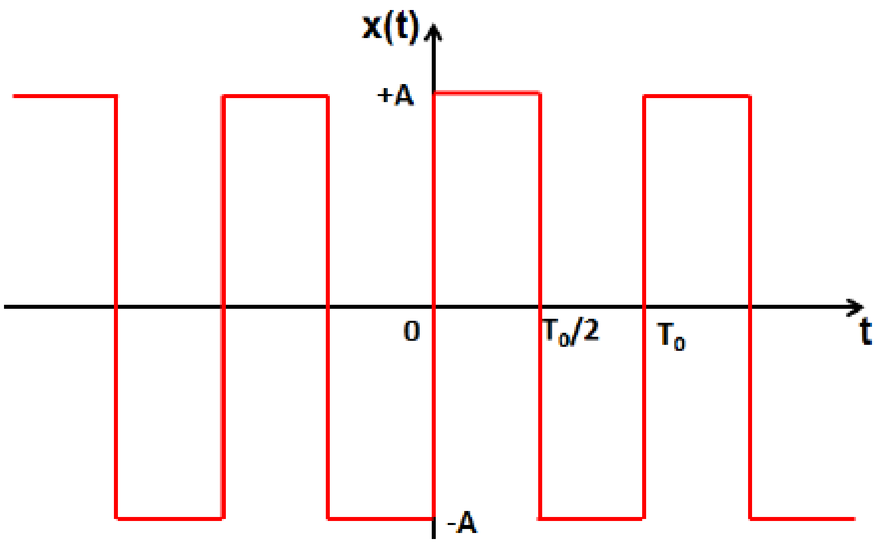
$$B_k = \frac{A}{k\pi}(-\cos(k\pi) + \cos(0)) - \frac{A}{k\pi}\big(-\cos(2k\pi) + cos(k\pi)\big) = \frac{2A}{k\pi}\left(1 - (-1)^k\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{B_k = \begin{cases} 0 \; si\; k\; est\; pair \\ \dfrac{4A}{k\pi} \; si\; k\; est\; impair \end{cases}}$$

Calcul des coefficients d'une série de Fourier

Forme trigonométrique - exemple

- Décomposition en série de Fourier d'un signal carré :



$$x(t) = \begin{cases} +A & si\ t \in [0; \frac{T_0}{2}] \\ -A & si\ t \in [\frac{T_0}{2}; T_0] \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{4A}{k\pi}\left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t) + \cdots\right] = \frac{4A}{(2k+1)\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\sin\left((2k+1)\omega_0 t\right)$$

- Indépendance des coefficients à la fréquence fondamentale du signal

Calcul des coefficients d'une série de Fourier

Forme complexe

- Décomposition en fonctions exponentielle complexe (forme la plus compacte)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

Avec :

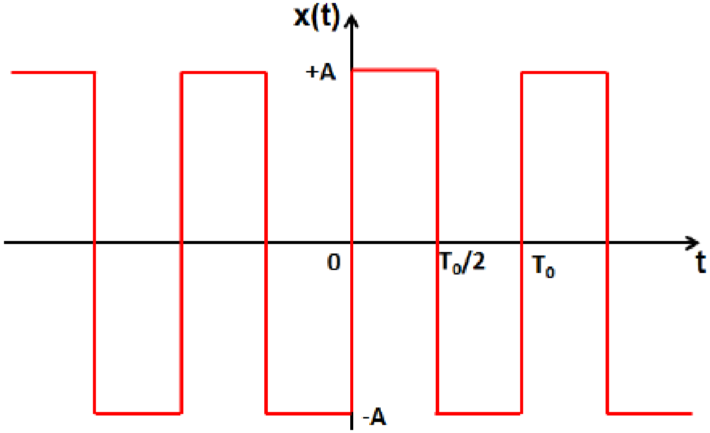
$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \ , \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Avec cette forme, l'indice k peut être négatif → apparition de fréquences négative $k.\omega_0$.
- C_0 représente la composante continue
- C_k est une grandeur complexe : phaseur

- Décomposition en série de Fourier du signal carré précédent sous la forme complexe ?

Calcul des coefficients d’une série de Fourier

Forme complexe - Exemple



$$C_0 = 0$$

$$C_k = \frac{A}{T_0}\left(\int_0^{T_0/2} e^{-jk\omega_0 t}\,dt - \int_{T_0/2}^{T_0} e^{-jk\omega_0 t}\,dt\right)$$

$$C_k = \frac{A}{jk\omega_0 T_0}\left(\left[-e^{-jk\omega_0 t}\right]_0^{T_0/2} - \left[-e^{-jk\omega_0 t}\right]_{T_0/2}^{T_0}\right) = \frac{A}{jk2\pi}\left(-e^{-jk\pi} + 1 + e^{-jk2\pi} - e^{-jk\pi}\right)$$

$$C_k = \frac{2A}{jk2\pi}\left(1 - e^{-jk\pi}\right)$$

$$C_k = \frac{2Ae^{-jk\pi/2}}{k\pi}\frac{e^{jk\pi/2} - e^{-jk\pi/2}}{2j} = \frac{2A(-j)^k}{k\pi} sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{C_k = 0 \quad si\ k\ est\ pair}$$

$$\boldsymbol{C_k = \frac{2A(-j)^k(-1)^k}{k\pi} = \frac{2Aj}{k\pi} \quad si\ k\ est\ impair}$$

Calcul des coefficients d'une série de Fourier

Forme complexe

- Lien entre les différentes formes :

$$2C_k = A_{|k|} - jB_{|k|} = \rho_k e^{j\phi_k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*$$

$$C_0 = A_0$$

$$\boldsymbol{A_k = C_k + C_{-k} \;\; et \;\; B_k = -j(C_k + C_{-k}) \;\; \forall k \epsilon N^+}$$

- Propriété de symétrie :

$$C_k = C^*_{-k} \quad \Rightarrow \quad |C_k| = |C_{-k}| \; et \; arg(C_k) = -arg(C_{-k})$$

$$\Rightarrow \quad C_k = \frac{A_k - jB_k}{2} \; \forall\, k \in \mathbb{N}^+ \qquad C_{-k} = \frac{A_k + jB_k}{2} \; \forall\, k \in \mathbb{N}^+$$

Calcul des coefficients d'une série de Fourier

Somme partielle

- Le développement en série de Fourier requiert la somme d'un nombre infini de termes trigonométriques ou exponentielles complexes, non réalisables en pratique.
- Dans la pratique, on tronque le nombre de termes à N → Somme partielle S_N :

$$S_n = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{N} B_k sin(k\omega_0 t) = \sum_{k=-N}^{+N} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

- ✓ **Impact sur la reconstruction du signal décomposée à partir de la somme partielle ?**
- ✓ **Convergence ?**

Calcul des coefficients d'une série de Fourier

Somme partielle -Illustration

- Exemple : on reprend le signal carré précédemment étudié, avec A = 1 et F_0 = 1 Hz.

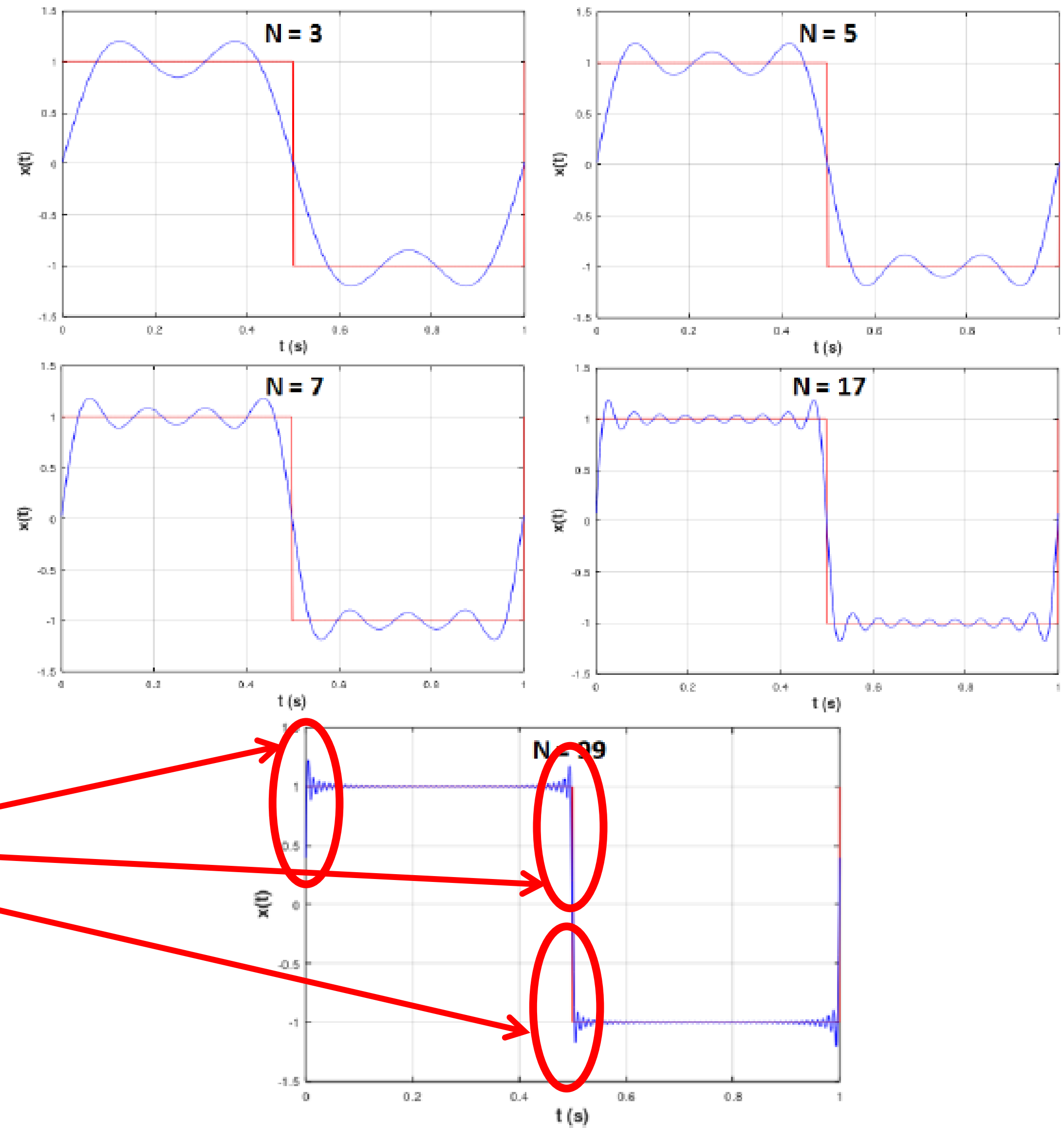
Ordre n	A_n	B_n	C_n
1	0	$\frac{4}{\pi}$	$j\frac{2}{\pi}$
3	0	$\frac{4}{3\pi}$	$j\frac{2}{3\pi}$
5	0	$\frac{4}{5\pi}$	$j\frac{2}{5\pi}$
7	0	$\frac{4}{7\pi}$	$j\frac{2}{7\pi}$
...	...	...	...

Décroissance de l'amplitude des coefficients avec l'ordre du coefficients.

Calcul des coefficients d'une série de Fourier

Somme partielle - Illustration

- Reconstitution du signal à partir de sommes partielles avec différentes valeurs de N :



Phénomène de Gibbs

Représentation fréquentielle

Représentation en spectre de raies

- Une fonction périodique peut être développée sous la forme d'une somme de termes exponentielles complexes :

$$x(t) = C_0 + C_1 e^{j\omega_0 t} + C_1^* e^{-j\omega_0 t} + C_2 e^{j2\omega_0 t} + C_2^* e^{-j2\omega_0 t} + C_3 e^{j3\omega_0 t} + C_3^* e^{-j''\omega_0 t} + \ldots$$

Composante continue

Harmonique fondamentale ou de rang 1

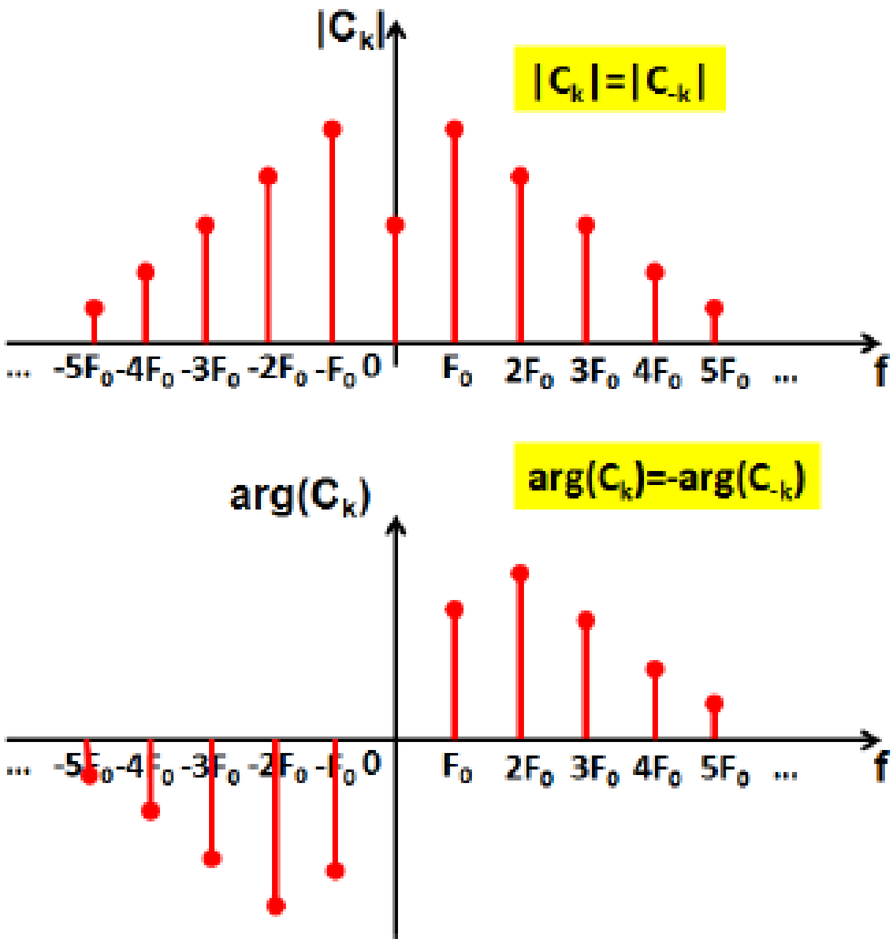
Harmonique de rang 2

Harmonique de rang 3

- Pour reconstituer le signal x(t), il nous seulement connaitre :
  - ✓ la période ou fréquence fondamentale
  - ✓ Le module et la phase des coefficients C_k associés aux harmoniques d'ordre k.
- On peut en déduire une nouvelle représentation du signal, dans un nouveau domaine : le **domaine fréquentiel**. Cette représentation est appelée **spectre de raies**, qui montre l'évolution du module (et de la phase) de Ck en fonction de la fréquence de l'harmonique, càd son rang.

Représentation en spectre de raies

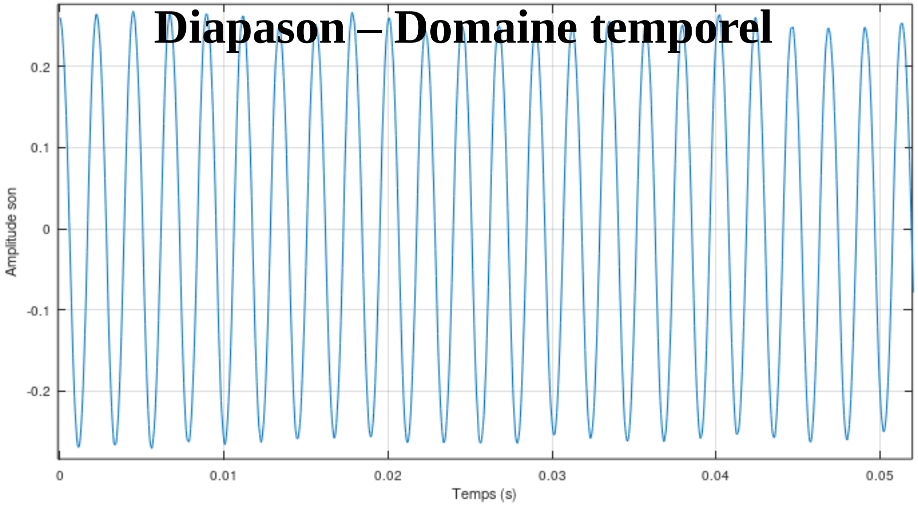
- Exemple :
  - ✓ Le spectre est discret en fréquence (périodicité temporelle du signal)
  - ✓ En pratique, on représente surtout le module (spectre d'amplitude)
  - ✓ L'unité du spectre d'amplitude est celle du signal
  - ✓ En pratique, en raison de la symétrie par rapport à f = 0, on ne représente que le spectre pour $f \geq 0$

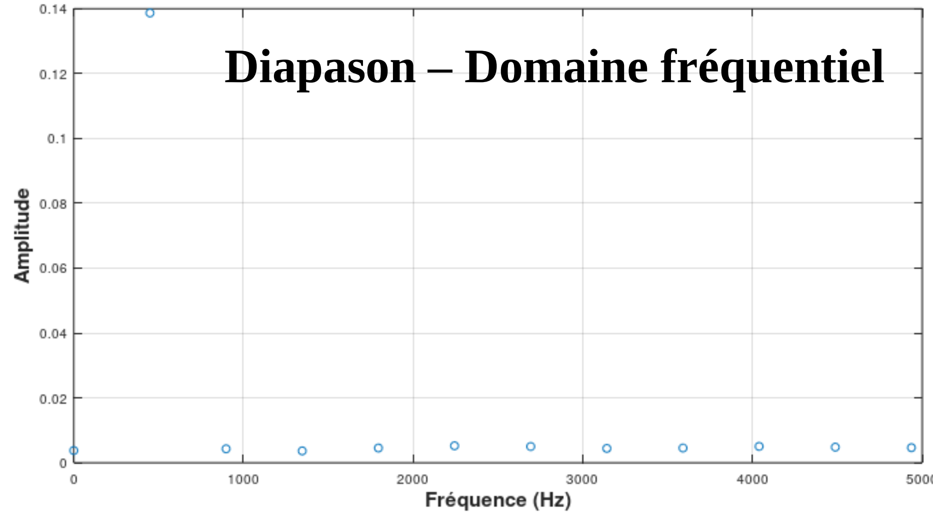


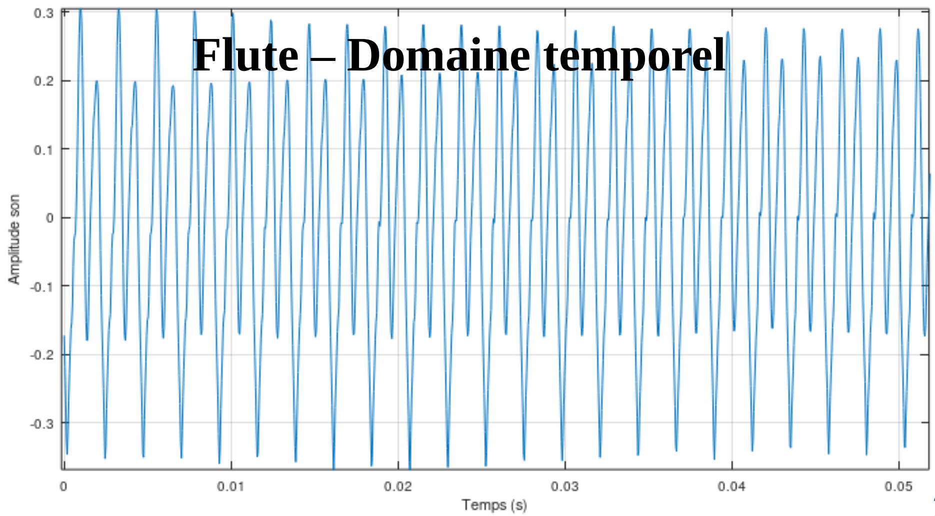
Représentation fréquentielle

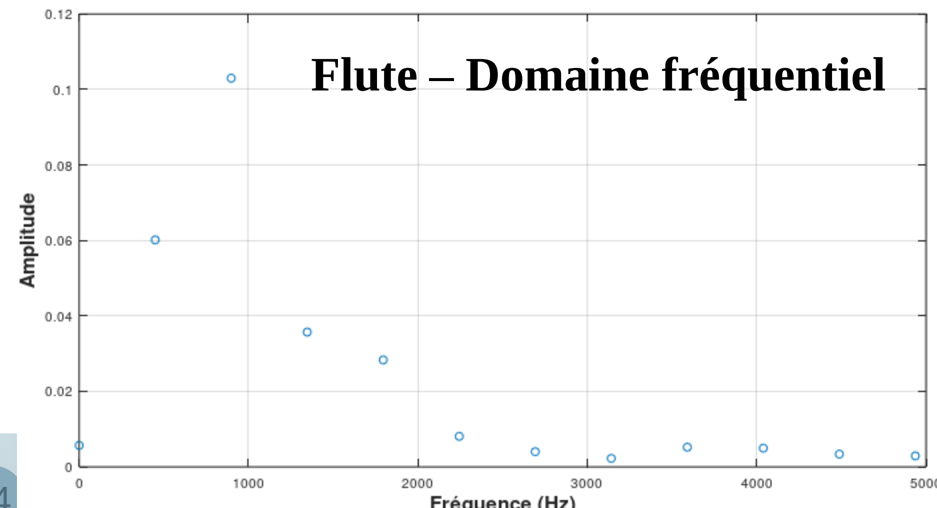
Analyse spectrale

- Exemple : spectre d’un LA 440 Hz produit par différents instruments de musique





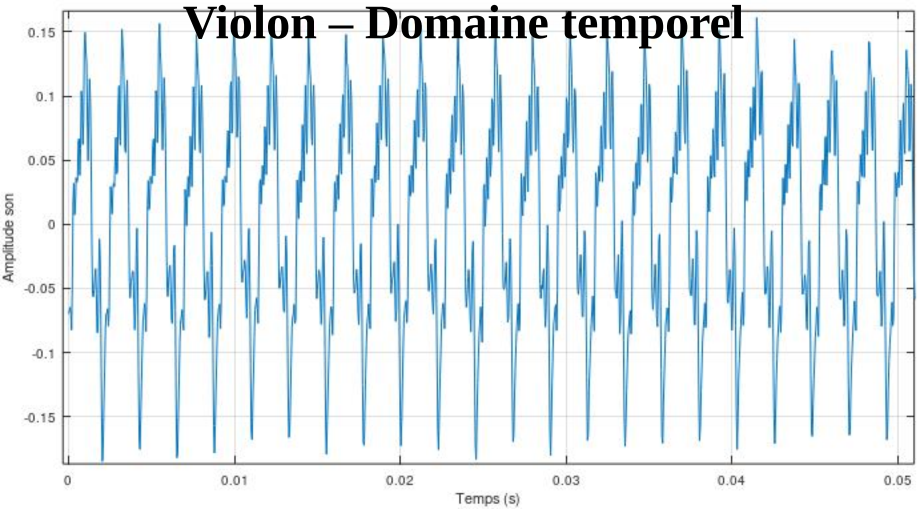


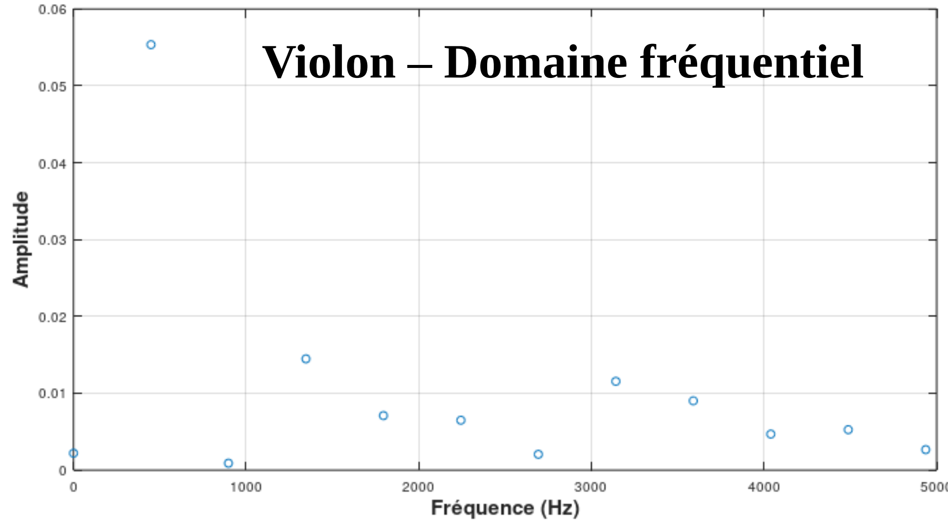


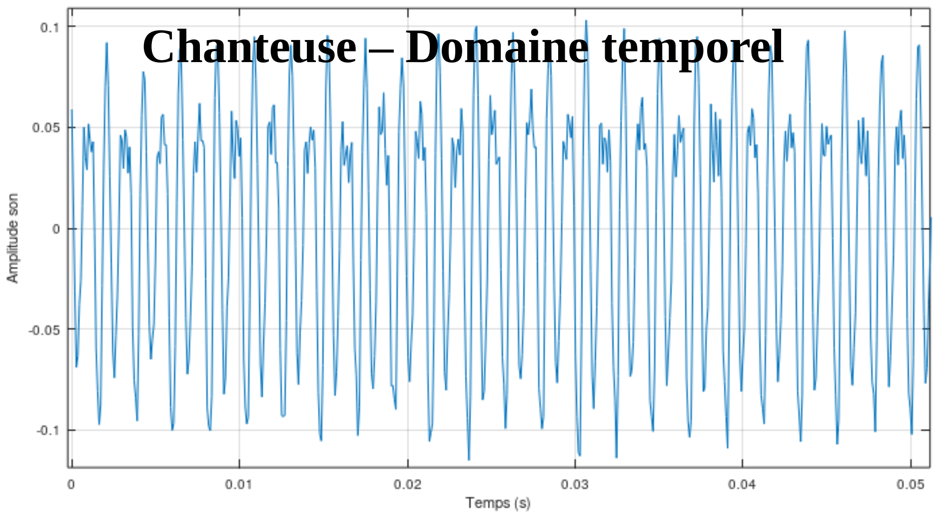
Représentation fréquentielle

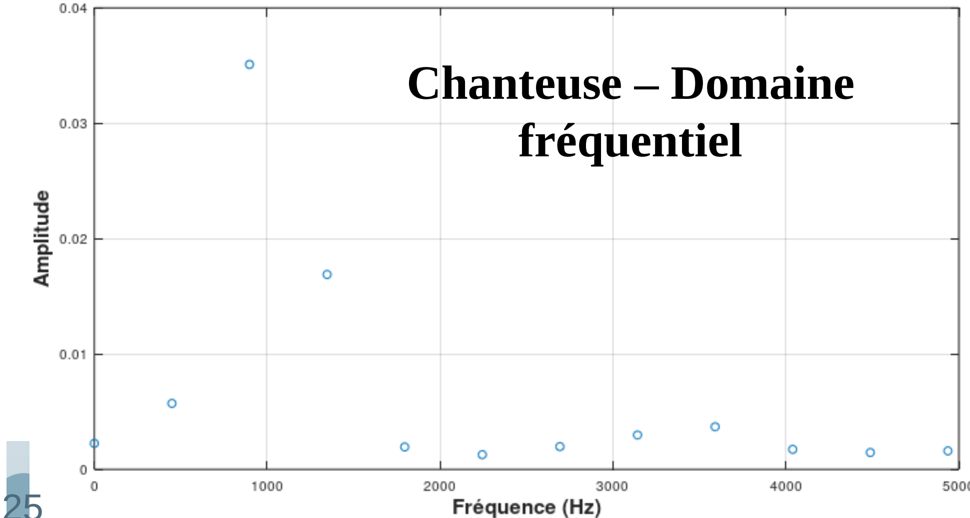
Analyse spectrale

- Exemple : spectre d'un LA 440 Hz produit par différents instruments de musique









Propriétés des transformées de Fourier

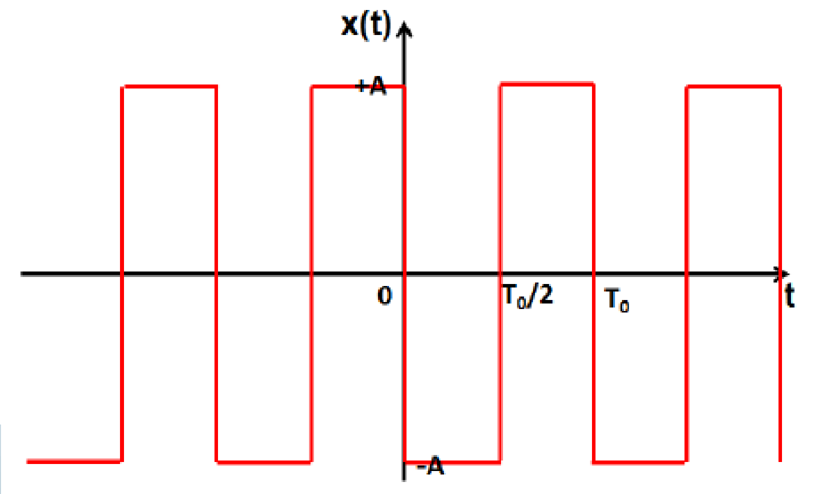
Propriétés

- Linéarité
- Invariance des coefficients au changement de période
- Théorème du retard : soit la fonction x(t) périodique dont les coefficients de Fourier sont notés α_k. Soit la fonction y(t) = x(t-t_0), où t_0 est un délai constant. Les coefficients de Fourier β_k de la fonction y(t) se calculent :

$$y(t) = x(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{jk\omega_0(t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{-jk\omega_0 t_0} e^{jk\omega_0 t}$$

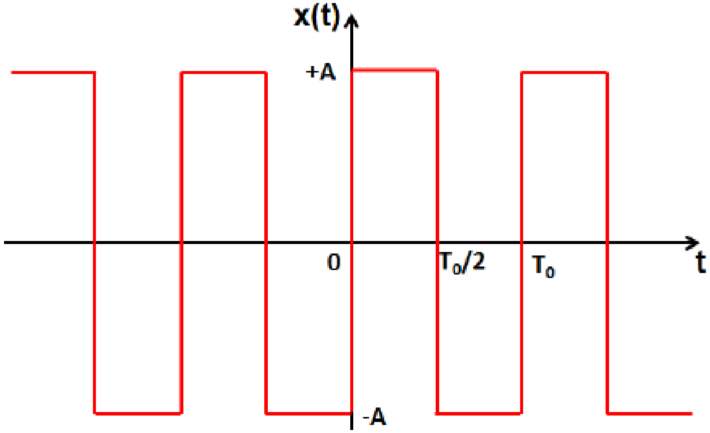
$$\beta_k = \alpha_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

- Calcul des coefficients de Fourier de la fonction carré ci-contre :



Propriétés des transformées de Fourier

Propriétés

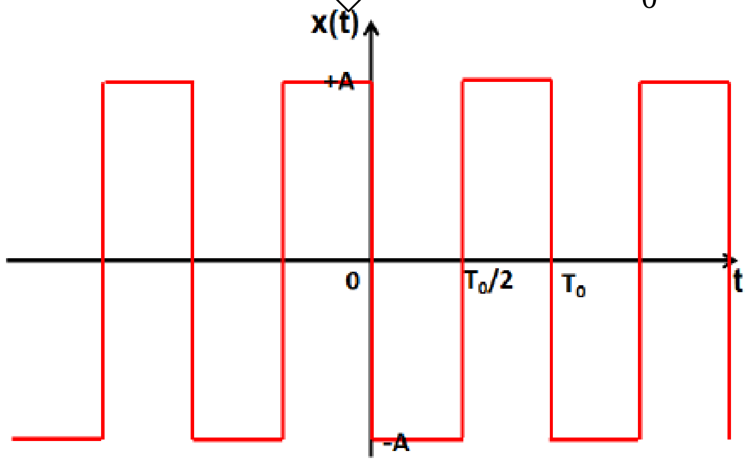


$$C_k = 0 \;\; si\ k\ est\ pair$$

$$C_k = \frac{2Aj}{k\pi} \;\; si\ k\ est\ pair$$

Théorème du retard

Avance ou retard de $T_0/2$



$$C_k = 0 \;\; si\ k\ est\ pair$$

$$C_k = \frac{2Aj}{k\pi} e^{-jk\omega_0 \frac{T_0}{2}} = \frac{2Aj}{k\pi} e^{-jk\pi}$$

$$= -\frac{2Aj}{k\pi} si\ k\ est\ impair$$

Propriétés des transformées de Fourier

Propriétés

- Dérivée : Soit une fonction périodique x(t) avec les coefficients de Fourier notés α_k. Si la fonction y(t) est la dérivée de la fonction x(t), alors ses coefficients de Fourier β_k s'écrivent :

$$\beta_k = (jk\omega_0)\alpha_k$$

- Dérivée d'ordre m : $$\beta_k = (jk\omega_0)^m \alpha_k$$

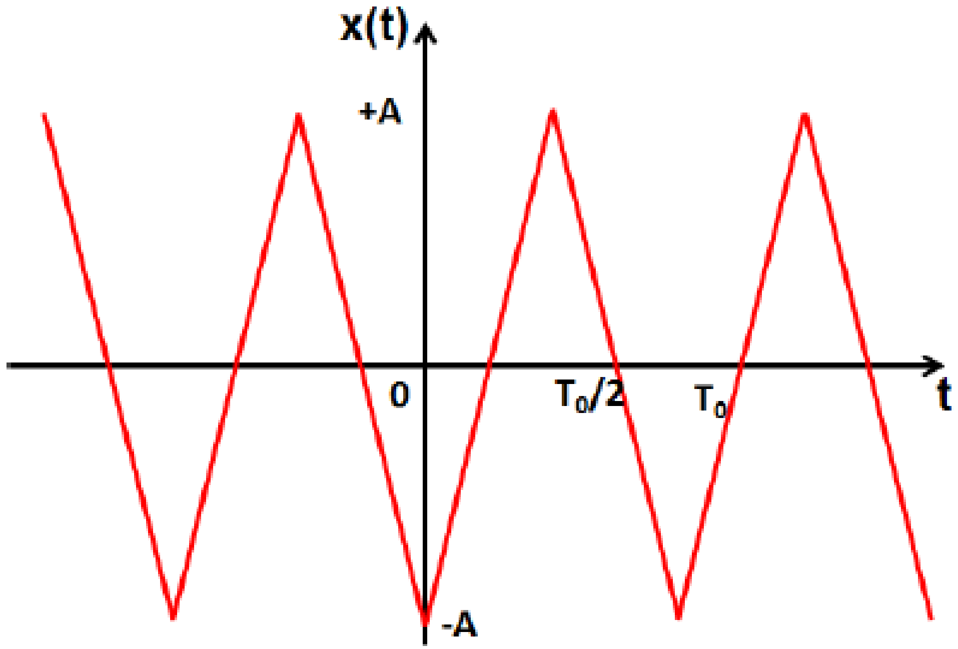
- Intégration : Si la fonction y(t) est l'intégrale de la fonction x(t), alors ses coefficients de Fourier β_k s'écrivent :

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{jk\omega_0}$$

- Intégration d'ordre m : $$\beta_k = \frac{\alpha_k}{(jk\omega_0)^m}$$

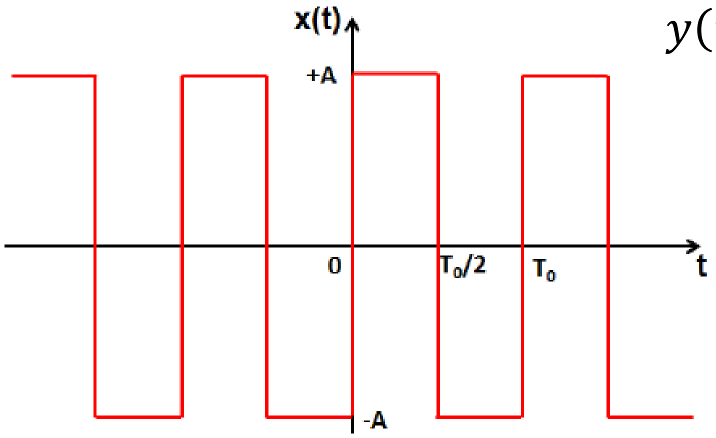
Propriétés - Exemple

- Calculez le développement en série de Fourier de la fonction triangulaire périodique ci-dessous.

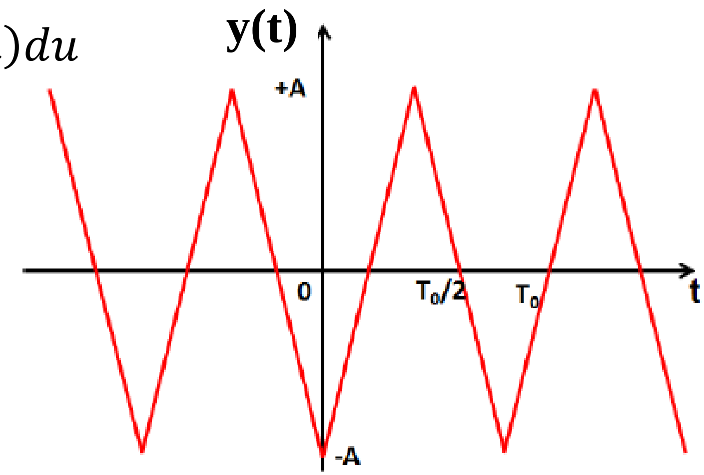


Propriétés - Exemple

- Calculez le développement en série de Fourier de la fonction triangulaire périodique ci-dessous.



$$y(t) = \frac{4}{T_0}\int_{-\infty}^{t} x(u)du$$



$$C_k = 0 \ \ si\ k\ est\ pair$$

$$C_k = \frac{2Aj}{k\pi} \ \ si\ k\ est\ pair$$

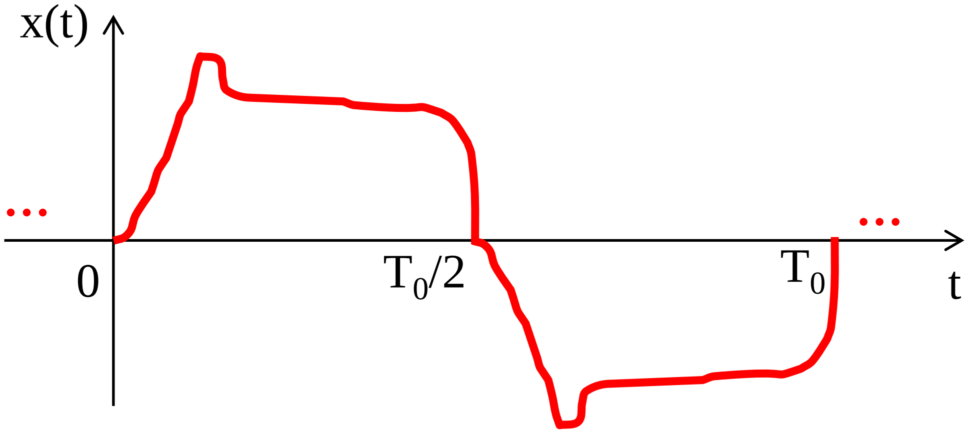
$$C_k = 0 \ \ si\ k\ est\ pair$$

$$C_k = \frac{4}{T_0}\frac{2Aj}{k\pi}\frac{1}{jk\omega_0} = \frac{4A}{(k\pi)^2} si\ k\ est\ impair$$

Propriétés des transformées de Fourier

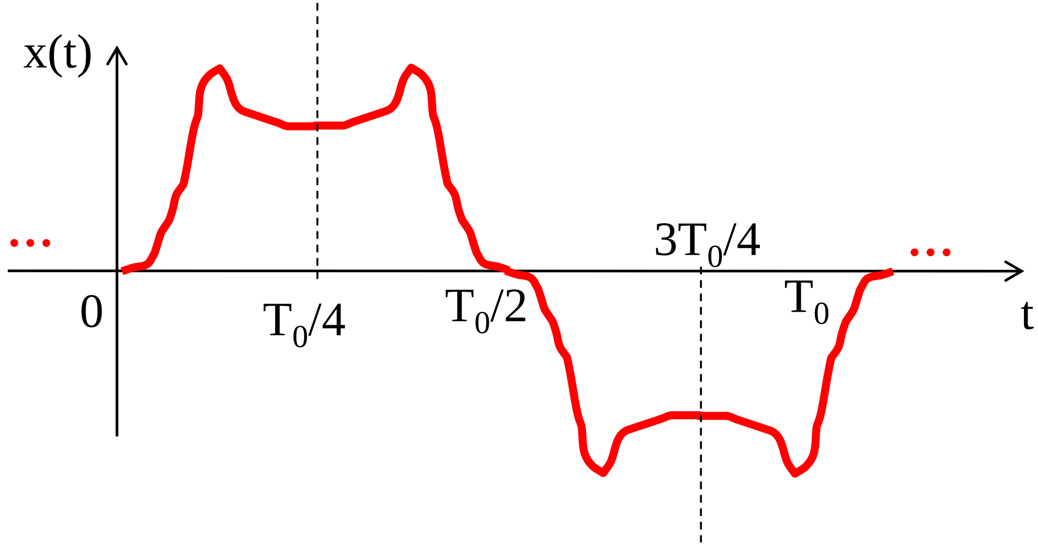
Propriétés

- Impact des symétries temporelles :
  - ✓ La fonction x(t) est paire (x(t) = x(-t)) : les termes B_k sont nuls et $C_k = C_{-k}$.
  - ✓ La fonction x(t) est impaire (x(t) = -x(-t)) : les termes A_k sont nuls et $C_k = -C_{-k}$.
  - ✓ Symétrie demi-onde (x(t) = -x(t-T_0/2)) : les termes A_k et B_k s'annulent pour les rangs k pairs.



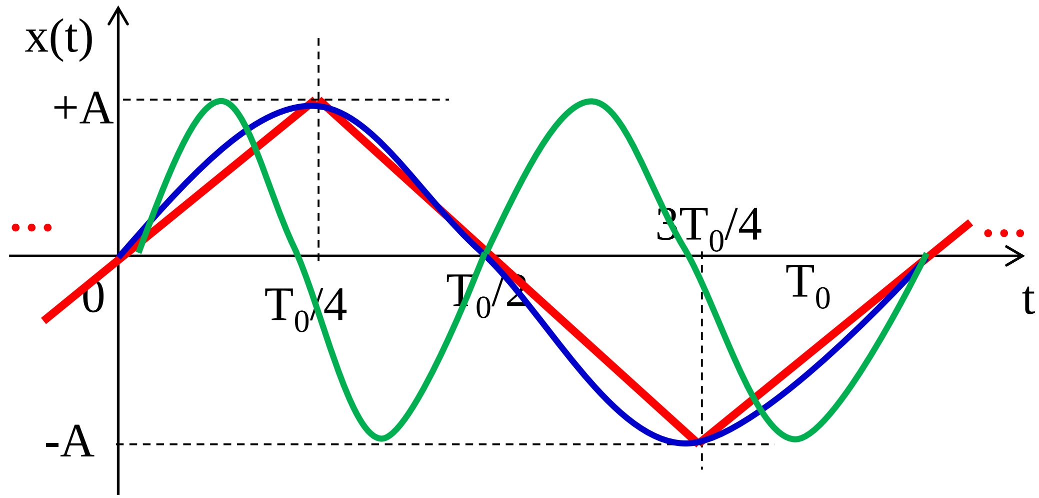
Propriétés

- Impact des symétries temporelles :
  - Symétrie quart d'onde : si la fonction est paire, les termes A_k s'annulent pour les rangs k pairs. Si la fonction est impaire, les termes B_k s'annulent pour les rangs k pairs.



Propriétés - Exemple

- Calculez le développement en série de Fourier de la fonction suivante en utilisant les propriétés de symétrie



Fonction impaire et propriété quart d'onde :

✓ les coefficients Ak s'annulent tous

✓Les coefficients Bk s'annulent pour les rangs k pairs

$$B_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\sin(k\omega_0 t)dt = \frac{8}{T_0}\int_0^{T_0/4} x(t)\sin(k\omega_0 t)dt, \quad k \ impair$$

Propriétés - Exemple

$$B_k = \frac{8}{T_0} \int_0^{T_0/4} \frac{4A}{T_0} t \sin(k\omega_0 t) dt$$

Intégration par parties

$$B_k = \frac{32A}{T_0^2} \left(\left[\frac{-t}{k\omega_0} \cos(k\omega_0 t) \right]_0^{T_0/4} + \left[\frac{1}{(k\omega_0)^2} \sin(k\omega_0 t) \right]_0^{T_0/4} \right)$$

$$B_k = \frac{32A}{T_0^2} \left(\left[\frac{-t}{k\omega_0} \cos(k\omega_0 t) \right]_0^{T_0/4} + \left[\frac{1}{(k\omega_0)^2} \sin(k\omega_0 t) \right]_0^{T_0/4} \right)$$

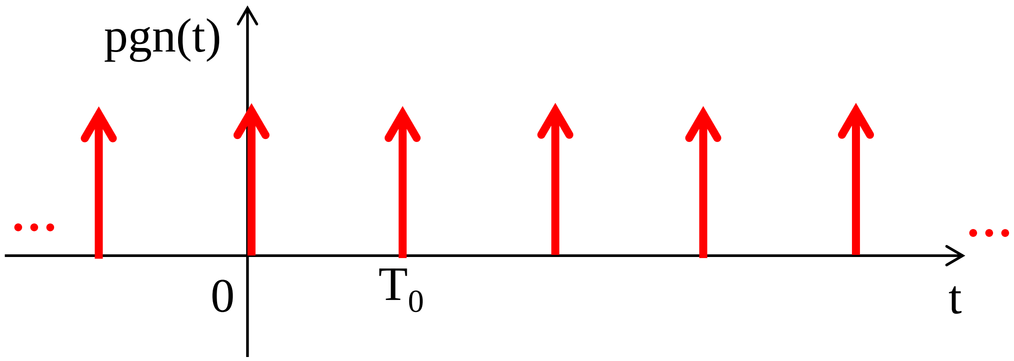
k impair

$$B_k = \frac{8A}{\pi^2 k^2} \sin\left(k \frac{\pi}{2} \right)$$

Propriétés des transformées de Fourier

Peigne de Dirac

- Suite périodique d'impulsions de Dirac → c'est une distribution
- Intérêt pratique : modélisation idéal de l'échantillonnage d'un signal continu (pour l'an prochain)



$$pgn(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_0)$$

- Décomposable en série de Fourier :

$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} pgn(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0} e^{-jk\omega_0 0} = \frac{1}{T_0} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

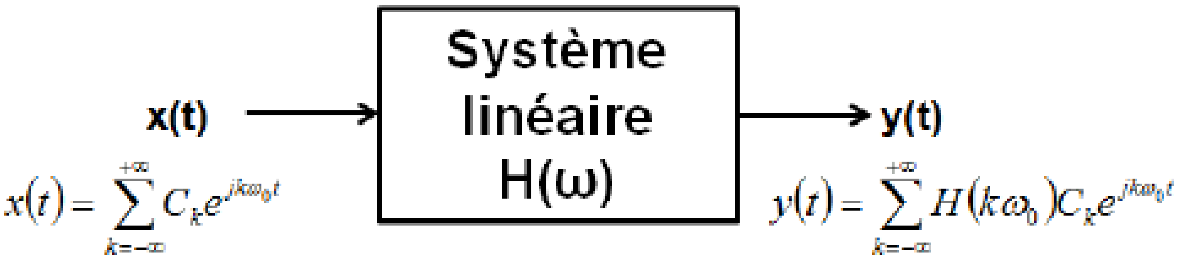
Spectre de même amplitude pour toutes les fréquences harmoniques de F_0.

Analyse fréquentiel d'un système LTI

Système LTI excité par un signal périodique

- Analyse de sa réponse en régime permanent
- En raison de la linéarité de la décomposition en série de Fourier :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k\omega_0) C_k e^{jk\omega_0}$$



Propriété des systèmes LTI :

Lorsqu'un système LTI est excité par un signal périodique, il contribue à modifier l'amplitude et la phase des composantes harmoniques. Des harmoniques d'une autre fréquence fondamentale ne peuvent pas apparaitre en sortie !

Egalité de Parseval

- La puissance moyenne d'un signal x(t) périodique est donnée par :

$$P_{moy} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 \, dt$$

- **Egalité de Parseval :**

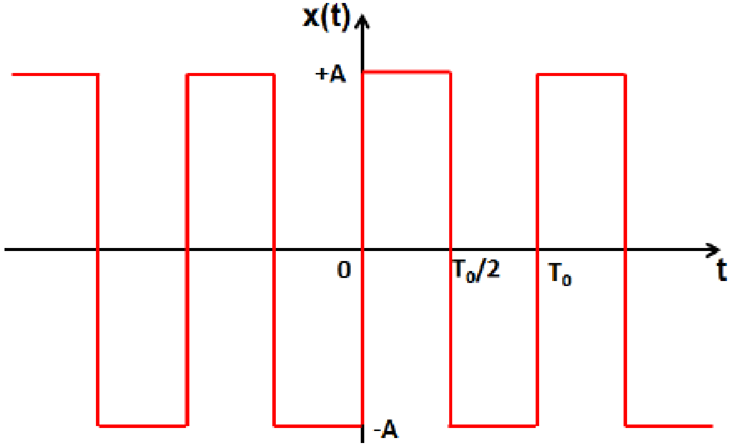
$$P_{moy} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2 = |A_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} |A_k|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} |B_k|^2$$

- Chaque composante harmonique contribue à la puissance moyenne du signal.
- Si la décomposition en série de Fourier existe, alors la somme des termes d'une somme partielle, mis au carré, converge vers la puissance moyenne du signal.

Analyse de la puissance moyenne

Egalité de Parseval

- Exemple : signal carré et convergence en puissance (T_0 = 1 s et A = 2 V)



$$P_{moy} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \left|x(t)\right|^2 dt$$

$$\Rightarrow P_{moy} = A^2 = 4\,W$$

- Coefficient de Fourier :

$$C_k = \frac{jA}{k\pi}\left(e^{-jk\pi} - 1\right)$$

Erreur < 5 % à partir du rang 7

Erreur < 1 % à partir du rang 35