3^{e} année FISA

Mise à niveau Signal

Transformée de Laplace

Alexandre Boyer

alexandre.boyer@insa-toulouse.fr

https://moodle.insa-toulouse.fr → I2MAEL11 - Conception et Circuits et Traitement du Signal (clé : **signal21**)

Introduction

Position du problème

- Deux manières de calculer la réponse transitoire d'un système LTI :
  - Réponse impulsionnelle + produit de convolution → calcul direct dans le domaine temporel
  - Fonction de transfert + multiplication → calcul dans le domaine fréquentiel, restriction aux excitations exponentielles complexes.
- Lien entre ces 2 méthodes ? Comment étendre le calcul dans le domaine fréquentiel à tous les types d'excitation ?
- Recherche d'une transformation mathématique assurant le passage d'une fonction du domaine temporel au domaine fréquentiel (et inversement)

$$y(t)=L[x(t)] \leftrightarrow Y(p)=H(p).X(p)$$

Transformation mathématique ?

Introduction

Transformation d'une fonction du domaine temporel → fréquentiel

- Considérons un système LTI, caractérisé par sa réponse impulsionnelle h(t) et sa fonction de transfert H(p), et une excitation x(t) quelconque
- Dans le cas général, sa réponse transitoire est donnée par :

$$y(t) = h * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

- Si l'excitation est de type exponentielle complexe ($x(t) = e^{pt}$) :

Domaine temporel

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{p(t-\tau)} d\tau$$

$$y(t) = e^{pt} . \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-p\tau} d\tau$$

Domaine fréquentiel

$$Y(p) = X(p).H(p) = e^{pt}.H(p)$$

$$e^{pt} \longrightarrow \boxed{\text{Système LTI}} \longrightarrow e^{pt}H(p)$$

H(p)

ou $e^{pt} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-p\tau} d\tau$

Introduction

Transformation d'une fonction du domaine temporel → fréquentiel

- Nous venons de mettre en évidence une transformation mathématique permettant de passer de h(t) (domaine temporel) à H(p) domaine fréquentiel (complexe ou domaine de Laplace).

$$H(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot exp(-pt)\mathrm{d}t \ , \quad p \in \mathbb{C}$$

→ **Transformée de Laplace**

- Transformation valable quelle que soit la fonction mathématique considérée.
- Variante dans le cas de signaux causaux, définis pour t > 0 :

$$H(p) = \int_{0}^{+\infty} h(t) \cdot exp(-pt)\mathrm{d}t \ , \quad p \in \mathbb{C}$$

Transformée de Laplace

Définition

- Transformée de Laplace (opérateur $\mathscr{L}$) bilatérale :

$$F(p) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot exp(-pt)\mathrm{d}t \ , \ \ p = \sigma + j\omega$$

- Transformée de Laplace unilatérale :

$$F(p) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_{0^+}^{+\infty} f(t) \cdot exp(-pt)\mathrm{d}t \ , \ \ p = \sigma + j\omega$$

- Dans la littérature anglo-saxonne, la fréquence complexe p est remplacée par s, l'opérateur de Heaviside.

- Dans la suite, pour représenter un signal x(t) causal, défini pour t > 0, nous utiliserons la notation suivante : x(t)u(t), où u(t) est l'échelon de Heaviside.

Transformée de Laplace

Fonction de transfert dans le domaine de Laplace

- On met généralement les fonctions de transfert sous la forme d'une fraction rationnelle de deux polynômes :

zéros

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0} \Rightarrow F(p) = G \frac{\prod_{i=1}^{m}(p - p_{zi})}{\prod_{i=1}^{n}(p - p_{pj})}$$

pôles

Transformée de Laplace

Propriétés

- Linéarité :

$$a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \longleftrightarrow a \cdot F(p) + b \cdot G(p) \ \ , avec\ F(p) = \mathscr{L}[f(t)]\ et\ G(p) = \mathscr{L}[g(t)]$$

- Théorème du retard : si F(p) est la transformée de Laplace de f(t), alors la transformée de Laplace $F_{t0}(p)$de $f(t-t_0)$, version retardée de f(t) est :

$$F_{t0}(p) = F(p) \cdot exp(-pt_0)$$

- Théorème du changement d'échelle : si F(p) est la transformée de Laplace de f(t), alors la transformée de Laplace $F_k(p)$de f(kt) (dilatation de l'échelle temporelle) est :

$$F_k(p) = \frac{1}{k} \cdot F(\frac{p}{k})$$

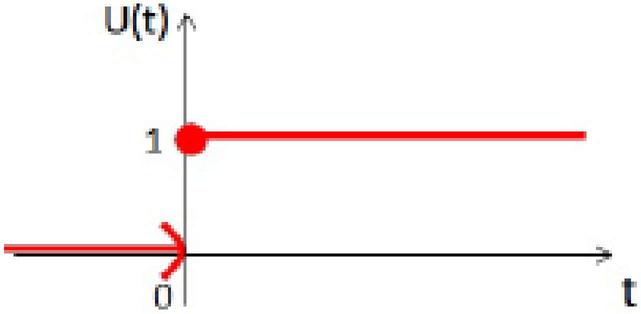
- Translation dans le domaine fréquentiel: un décalage de fréquence p_1 conduit à une multiplication par e^{p1t} dans le domaine temporel

$$soit\ F(p) = \mathscr{L}[f(t)]\ alors\ \mathscr{L}[e^{p_1t} f(t)] = F(p - p_1)$$

Transformée de Laplace

Propriétés - Exemple

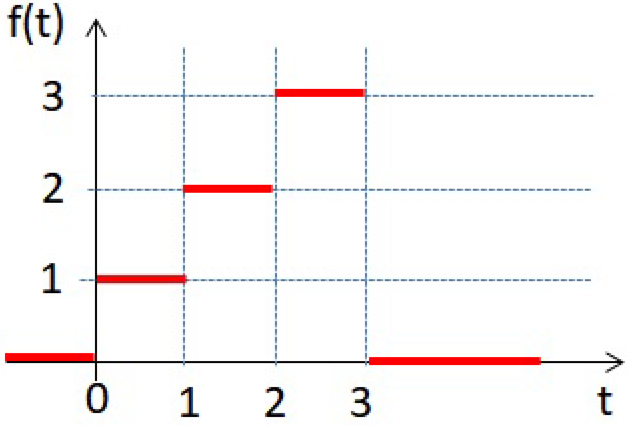
- Transformée de Laplace de la fonction échelon unitaire f(t) = u(t) :



$$F(p) = \mathscr{L}[u(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)exp(-pt)\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} exp(-pt)\mathrm{d}t = [-\frac{exp(pt)}{p}]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

Propriétés - Exemple

- Transformée de Laplace de la fonction suivante :



$$f(t) = u(t) + u(t-1) + u(t-2) - 3u(t-3)$$

$$F(p) = \mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[u(t)] + \mathscr{L}[u(t-1)] + \mathscr{L}[u(t-2)] - 3\mathscr{L}[u(t-3)]$$

$$F(p) = \frac{1}{p} + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p} - 3\frac{e^{-3p}}{p}$$

Propriétés

- Dérivation dans le domaine temporel (f(t) continue pour t > 0) :

$$\mathcal{L}[\frac{df}{dt}] = p \cdot F(p) - f(0^-) \quad avec \ f(0^-) = \lim_{t \to 0^-} f(t)$$

Condition initiale

$$\mathcal{L}[\frac{d^n f}{dt^n}] = p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0^-) - p^{n-2} \cdot \frac{df}{dt}(0^-) - ... - p\frac{d^{n-2} f}{dt^{n-2}}(0^-) - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(0^-)$$

Conditions initiales

- Dérivation dans le domaine fréquentiel revient à multiplier la fonction temporel par t (t > 0)

$$soit \ F(p) = \mathscr{L}[f(t)] \ alors \ \mathscr{L}[-t \cdot f(t)] = \frac{dF(p)}{dp})$$

$$soit \ F(p) = \mathscr{L}[f(t)] \ alors \ \mathscr{L}[-(t)^n \cdot f(t)] = \frac{dF^n(p)}{dp^n})$$

Propriétés

- Transformée de Laplace d'une impulsion de Dirac ?

Si calcul direct de la transformée de Laplace : $L[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = e^{-p.0} = 1$

En utilisant la propriété de dérivation ($\delta(t) = \frac{du}{dt}$) :

$$L[\delta(t)] = p.U(p) = p.\frac{1}{p} = 1 \;\; (pas\ de\ conditions\ initiales)$$

Propriétés

- Intégration dans le domaine temporel (f(t) continue pour t > 0) :

$$soit\ F(p) = \mathscr{L}[f(t)]\ alors\ \mathscr{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{F(p)}{p}$$

$$soit\ F(p) = \mathscr{L}[f(t)]\ alors\ \mathscr{L}[\int \ldots \int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{F(p)}{p^n}$$

- Théorème de la valeur initiale (f(t) continue pour t > 0) :

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{p \to +\infty} pF(p)$$

- Théorème de la valeur finale (f(t) continue pour t > 0) :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p) \Rightarrow \int_{0^-}^{t} f(t)dt = F(0)$$

Transformée de Laplace

Propriétés

- Equivalence multiplication et produit de convolution :

$$\mathscr{L}[f(t)\cdot g(t)] = F * G(p) \qquad \mathscr{L}[f * g(t)] = F(p)\cdot G(p)$$

- Fonction causale avec N répétitions périodiques (période T)

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f_1(t-kT) \Rightarrow F(p) = \mathscr{L}[f(t)] = F_1(p)(1+e^{-Tp}+e^{-2Tp}+\ldots+e^{-(N-1)Tp})$$

Fonction génératrice

- Fonction périodique causale

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_1(t-kT) \Rightarrow F(p) = \mathscr{L}[f(t)] = \lim_{N\to+\infty} F_1(p)\frac{1-e^{-(N-1)Tp}}{1-e^{-Tp}} = F_1(p)\frac{1}{1-e^{-Tp}}$$

Indique une périodicité de période T

Transformée de Laplace

Table des transformées de Laplace courantes

Transformée de Laplace

Fonctions temporelles f(t)	Transformée de Laplace F(p)
Echelon unitaire u(t)	$\frac{1}{p}$
Fonction rampe $f(t) = t \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
Fonction rampe polynomiale $f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{p^n}$
Fonction exponentielle $f(t) = e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$f(t) = te^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
$f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(p+\alpha)^n}$
Fonction cosinus $f(t) = cos(\omega t)u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
Fonction sinus $f(t) = sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
Fonction cosinus amorti $f(t) = e^{-\alpha t}cos(\omega t)u(t)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
Fonction rampe limitée $f(t) = \begin{cases} A\frac{t}{\tau}u(t) \text{ , } si\ t \leq \tau \\ A \cdot u(t) \end{cases}$	$A\frac{1-e^{-p\tau}}{p^2\tau}$

????

Exercice 3.1 (a et b)

Transformée de Laplace inverse

Définition

- Transformée de Laplace inverse (opérateur $\mathscr{L}^{-1}$)

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)exp(pt)\mathrm{d}p$$

- Intégration dans le plan complexe → mathématiquement difficile ! Sort du cadre de ce cours.
- Méthode pratique : utilisation des tables reliant les fonctions temporelles et leurs transformées de Laplace, identification de la fonction temporelle associée.
- Cependant, si la transformée de Laplace se présente sous la forme du fraction rationnelle de deux polynômes d'ordre élevé, il est probable qu'aucune table ne donne la fonction temporelle associée.
- Exemple :

$$H(p) = \frac{p-2}{p^2+p-2} \quad \rightarrow \; h(t)?$$

Transformée de Laplace inverse

Décomposition pôles-résidus (ou en fractions partielles)

- Si la fraction est propre (m ≤ n) :

Résidu

$$F(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=A\frac{(p-p_{zm})\dots(p-p_{z1})}{(p-p_{pn})\dots(p-p_{p1})}=\underbrace{\frac{A_1}{p-p_{p1}}+\frac{A_2}{p-p_{p2}}+\dots+\frac{A_n}{p-p_{pn}}}_{\text{Les transformées de Laplace inverse de ces fractions partielles sont évidentes}}$$

Pôle

- Si la fraction est impropre (m > n) :

$$\frac{N(p)}{D(p)}=Q(p)+\frac{R(p)}{D(p)}\ ,\ si\ n<m$$

- Exemple :

$$\frac{p-2}{p^2+p-2}$$

Décomposition pôles-résidus (ou en fractions partielles)

- Méthode d'association des fractions partielles - Exemple :

$$\frac{p-2}{p^2+p-2} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+2} \Rightarrow \frac{p-2}{p^2+p-2} = \frac{A(p+2)+B(p-1)}{p^2+p-2} = \frac{(A+B)p+(2A-B)}{p^2+p-2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=-2 \end{cases} \Rightarrow A = -\tfrac{1}{3} \text{ et } B = \tfrac{4}{3}$$

- Méthode du cache : annulation successive de chaque pôle pour déduire le résidu associé

$$\frac{p-2}{(p+2)} = A + \frac{B(p-1)}{p+2} \Rightarrow$$ En posant p = 1 : $A = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$

$$\frac{p-2}{(p-1)} = \frac{A(p+2)}{p-1} + B \Rightarrow$$ En posant p = -2 : $B = \frac{-2-2}{-2-1} = \frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \frac{p-2}{p^2+p-2} = \frac{-1}{3(p-1)} + \frac{4}{3(p+2)}$$

Transformée de Laplace inverse

Exemple

- Calculez la transformée de Laplace inverse de : $$H(p) = \frac{p-2}{p^2+p-2}$$

$$\frac{p-2}{p^2+p-2} = \frac{-1}{3(p-1)} + \frac{4}{3(p+2)}$$

$\Downarrow$ Laplace inverse

$$\left[-\frac{1}{3}e^{t} + \frac{4}{3}e^{-2t}\right]u(t)$$

Applications

Résolution d'équations différentielles ordinaires

- Exemple : résoudre l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$$

- Avec y(t) une fonction causale (t > 0) et les conditions initiales suivantes : $y(0^+) = 1$ et $y'(0^+) = -2$.

Transfo. de Laplace + théorème de la dérivation

$$p^2Y(p) - py(0^+) - y'(0^+) + 4(pY(p) - y(0^+)) + 4Y(p) = 0$$

$$Y(p) = \frac{y'(0^+) + (p+4)y(0^+)}{p^2+4p+4} = \frac{p+2}{(p+2)^2} = \frac{1}{p+2}$$

Transfo. de Laplace inverse

$$y(t) = \mathscr{L}[Y(p)] = e^{-2t}u(t)$$

Vérification

…

Exercice 3.5

Applications

Calcul de la réponse transitoire d’un système LTI

Conditions initiales

Equation différentielle

$$\sum_{i=0}^{M} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^{N} a_j \frac{d^j x}{dt^j}$$

Transformée de Laplace

$$\sum_{i=0}^{M} a_i \left(p^i Y(p) + \ldots\right) = \sum_{j=0}^{N} a_j \left(p^j X(p) + \ldots\right)$$

Transformée de Laplace

$x(t)$

Calcul de la solution dans le domaine fréquentiel

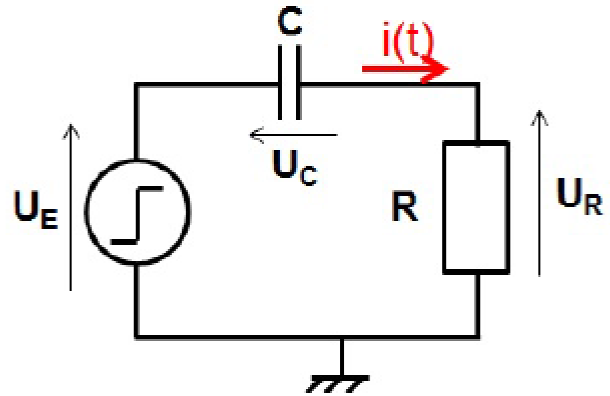
$$Y(p) = H(p).X(p)$$

Transformée de Laplace inverse

$y(t)$

Calcul de la réponse transitoire d'un système LTI - Exemple

- Calcul de la réponse du circuit RC suivant à l'excitation $U_E(t) = E.u(t)$
- Le condensateur est initialement chargé ($Uc(0) = U_{C0}$)



$$U_E(t) = U_C(t) + U_R(t) \Rightarrow U_E(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t + U_R(t)$$

$$\Rightarrow U_E(t) = \frac{1}{RC}\int U_R(t)\mathrm{d}t + U_R(t)$$

Dérivation

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{U_R}{RC} + \frac{dU_R}{dt} = \frac{U_R}{\tau} + \frac{dU_R}{dt}$$

T.L.

$$pU_E(p) - U_E(0^+) = \frac{U_R(t)}{\tau} + pU_R(p) - U_R(0^+)$$

$$(p + \frac{1}{\tau})U_R(p) + U_E(0^+) - U_R(0^+) = pU_E(p)$$

$$U_R(p) = \frac{p}{p+\frac{1}{\tau}}U_E(p) - \frac{1}{p+\frac{1}{\tau}}U_C(0^+) = H(p)U_E(p) - \frac{1}{p+\frac{1}{\tau}}U_{C0}$$

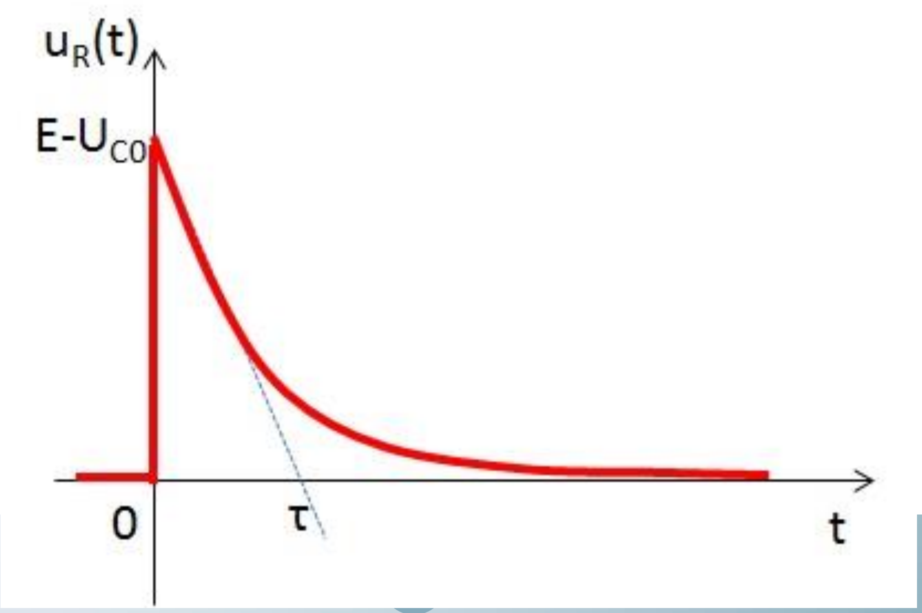
Calcul de la réponse transitoire d'un système LTI - Exemple

T.L.I.

$$u_R(t) = \mathscr{L}^{-1}[H(p)U_E(p)] - \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p+\frac{1}{\tau}}U_{C0}]$$

$$u_R(t) = E\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p+\frac{1}{\tau}}] - U_{C0}\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{p+\frac{1}{\tau}}]$$

$$u_R(t) = (E - U_{C0})e^{-\frac{t}{\tau}}u(t) = (E - U_{C0})e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

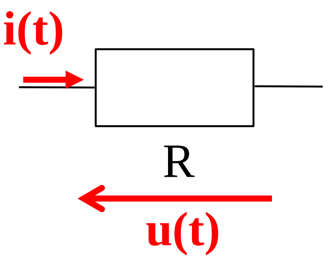


Applications

Calcul de la réponse transitoire d'un système LTI - Exemple

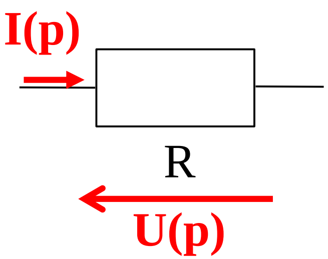
Extraction d'un circuit électrique équivalent dans le domaine de Laplace :

Résistance :



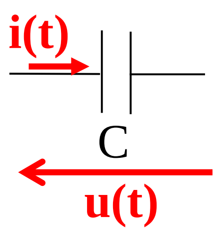
u(t)=R.i(t)

Transformée de Laplace



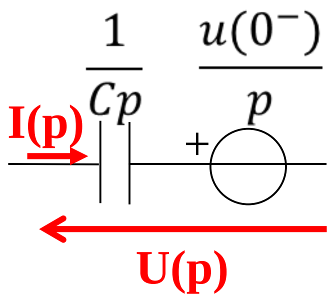
U(p)=R.I(p)

Condensateur :



$$i(t) = C.\frac{du}{dt}$$

Transformée de Laplace



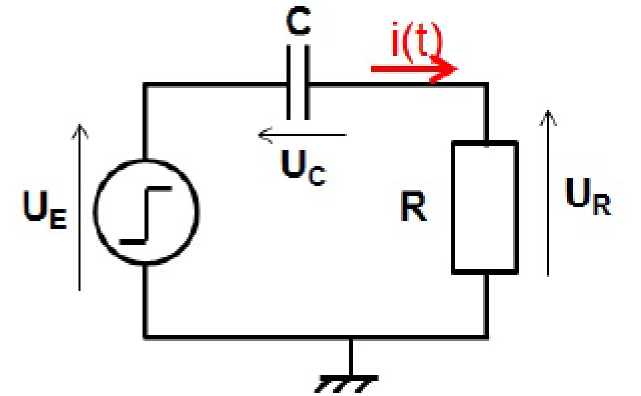
$$I(p) = C(pU(p) - u(0^-))$$

$$U(p) = \frac{1}{Cp}I(p) + \frac{u(0^-)}{p}$$

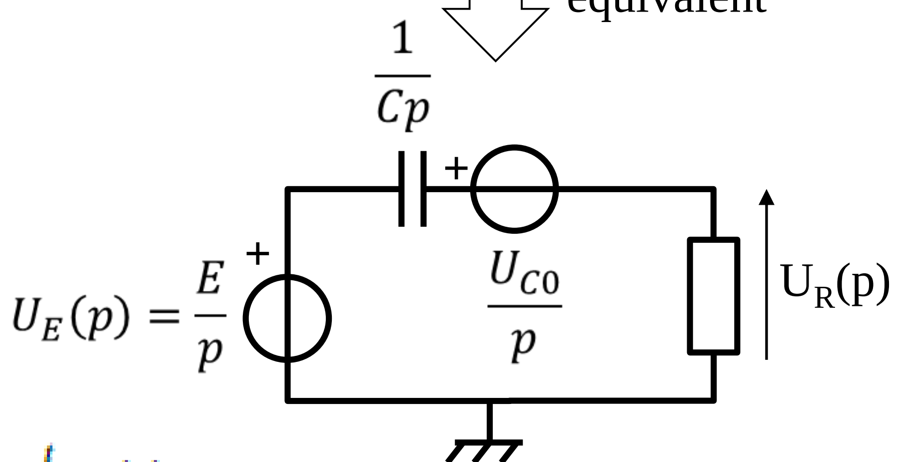
Calcul de la réponse transitoire d'un système LTI - Exemple

➤ Calcul de la réponse du circuit RC suivant à l'excitation $U_E(t) = E.u(t)$

➤ Le condensateur est initialement chargé ($U_c(0) = U_{C0}$)



Circuit équivalent



$$U_R(p) = \left(U_R(p) - \frac{U_{C0}}{p}\right)\frac{R}{R + \frac{1}{Cp}}$$

$$U_R(p) = \frac{E - U_{C0}}{p}\,\frac{RCp}{RCp + 1}$$

$$U_R(p) = \frac{E-U_{C0}}{p}\,\frac{p}{p+\frac{1}{\tau}} = \frac{E-U_{C0}}{p+\frac{1}{\tau}}$$

T.L.I.

$$u_R(t) = (E - U_{C0})e^{-\frac{t}{\tau}}u(t) = (E - U_{C0})e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

Calcul de la réponse transitoire d’un système LTI - Exemple

Auto-évaluation sur la partie système LTI + Transformée de Laplace disponible sur Moodle